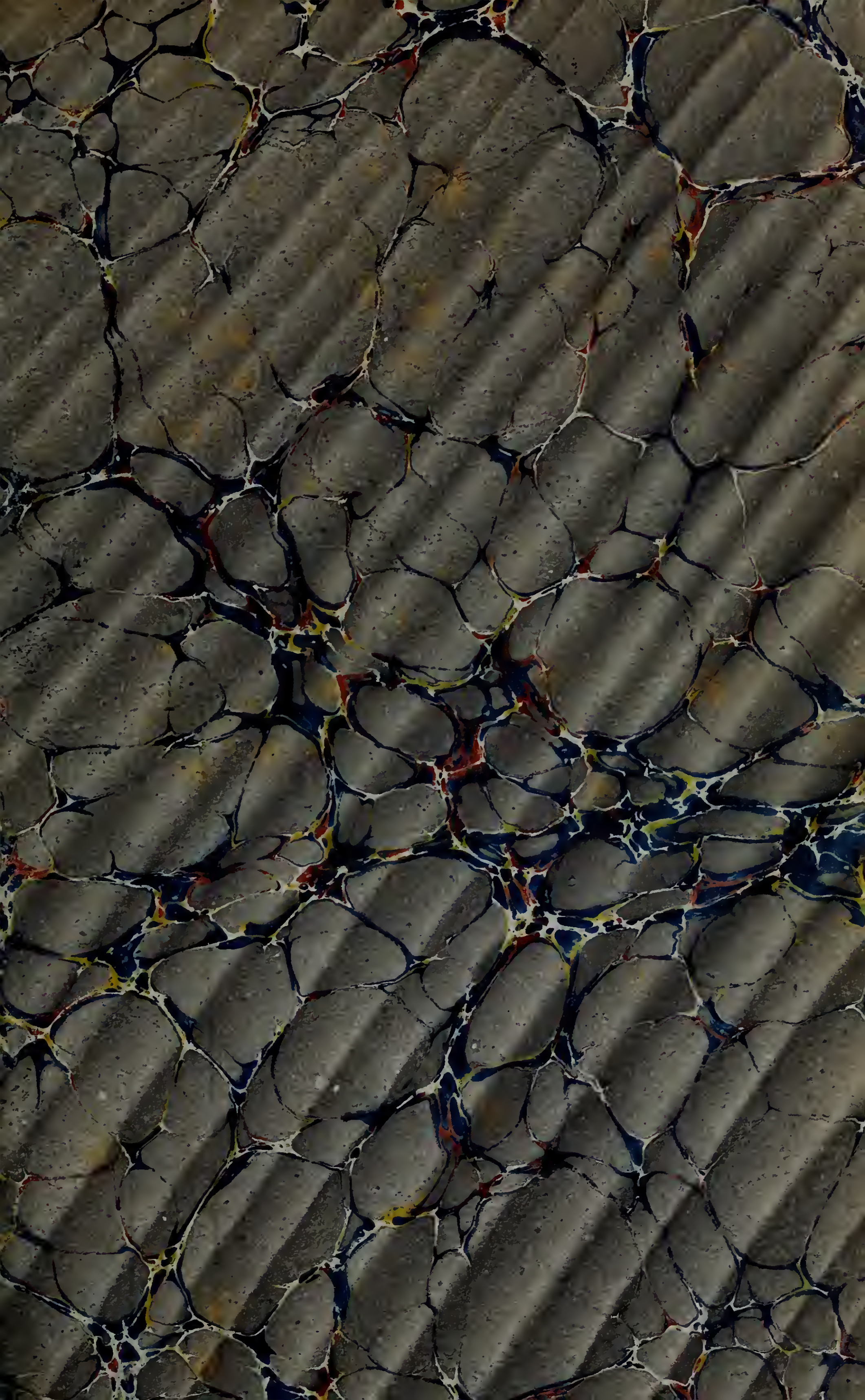






BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

PARIS. — IMPRIMERIE DE GAUTHIER-VILLARS,
Rue de Seine-Saint-Germain, 10, près l'Institut.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES,

RÉDIGÉ PAR M. G. DARBOUX,
AVEC LA COLLABORATION DE MM. HOÜEL ET LOEWY,
SOUS LA DIRECTION DE LA COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

TOME PREMIER. — ANNÉE 1870.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,
SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,
Quai des Augustins, 55.

1870

COMITÉ DE RÉDACTION.

AVERTISSEMENT.

Les géomètres n'ont pas oublié les utiles services qu'a rendus M. de Férussac par la publication de son *Bulletin* consacré aux différentes branches de la science. Établir un lien entre les savants, faire connaître à ceux qui sont le plus isolés les principaux travaux accomplis dans les différentes parties du monde, telle était la tâche que s'était proposée M. de Férussac et qu'il a remplie pendant plusieurs années avec le plus grand succès.

Nous nous proposons de reprendre, sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique, et de la Commission des Hautes Études, la publication du *Bulletin* interrompue au grand regret des géomètres. Nous nous rattachons directement par le but et le plan de notre publication au *Bulletin des Sciences mathématiques*, et nous serions heureux si le public mathématique voulait bien nous accueillir avec la même faveur que notre savant prédécesseur. Les circonstances nous ont paru d'ailleurs très-favorables à la réalisation de notre entreprise. Au commencement de ce siècle, les *Annales* de M. Gergonne étaient le seul journal exclusivement consacré aux sciences mathématiques. Depuis, le nombre des publications périodiques s'est accru dans une grande proportion, et l'on peut compter aujourd'hui, chez les différentes nations, plus d'une vingtaine de Recueils consacrés à la publication des travaux et Mémoires mathématiques. Ces Recueils suffisent pleinement aux besoins de la science; ils sont bien connus et en possession de la faveur méritée des géomètres. Aussi, nous garderons-nous bien de leur faire une concurrence inutile. Au lieu de publier des Mémoires originaux et inédits, nous rendrons compte régu-

lièrement des travaux de toute nature publiés soit en France, soit à l'étranger; nous ferons tous nos efforts pour tenir nos lecteurs au courant des progrès accomplis soit dans l'enseignement, soit dans la marche des sciences mathématiques.

L'utilité de notre œuvre avait été vivement sentie par M. de Férussac. Voici comment il s'exprime à ce sujet dans son Avertissement :

« Il est une vérité incontestable, c'est qu'en répandant partout, et plus généralement que cela ne se fait aujourd'hui, la connaissance des divers travaux publiés, ou celle des faits observés, on multiplie, d'une part, les chances de débit pour les Ouvrages; et, d'un autre côté, cette connaissance plus générale des faits augmente, dans une progression indéfinie, l'impulsion donnée aux esprits occupés des sciences, régularise la marche de leurs travaux, évite une foule d'essais, de tâtonnements, d'écrits inutiles, fruits naturels de l'isolement où sont en général les savants. On peut présumer ce que produirait en résultats utiles le temps ordinairement perdu par cette absence d'un lien commun et d'une correspondance active qui montrerait, aux savants des parties les plus reculées, l'état de la branche des sciences qu'ils cultivent, ce qu'il reste à faire, et le point d'où ils doivent partir s'ils veulent lui faire faire des progrès. »

Le nouveau *Bulletin* sera exclusivement consacré aux Mathématiques et à l'Astronomie. Il comprendra trois Parties principales : 1° *les comptes rendus de Livres;* 2° *les analyses de Mémoires;* 3° *les Communications de peu d'étendue, et les traductions de Mémoires importants et peu répandus.*

Nous recevrons avec reconnaissance les renseignements, les traductions, notes historiques, livres, brochures qu'on voudra bien nous adresser, et nous tâcherons de mettre en œuvre tous les matériaux réunis de manière à être utiles à la fois aux auteurs des Mémoires, et aux personnes qui désirent simplement se tenir au courant des progrès de la science.

G. DARBOUX.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES

ET

ASTRONOMIQUES.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

SERRET (Paul), Docteur ès Sciences, Membre de la Société philomathique. — Géométrie de direction. *Application des coordonnées polyédriques. Propriété de dix points de l'ellipsoïde, de neuf points d'une courbe gauche du quatrième ordre, de huit points d'une cubique gauche.* — In-8, avec figures dans le texte, xx-523 pages; 1869. Paris, Gauthier-Villars. Prix : 10 francs.

Ce nouvel Ouvrage d'un auteur déjà connu et apprécié contient des propositions d'Analyse et de Géométrie qui nous paraissent d'une véritable importance; nous croyons qu'il sera lu avec profit par toutes les personnes qui s'intéressent aux progrès de la Géométrie analytique.

Les principes posés par l'auteur sont susceptibles d'applications très-variées. M. Serret a surtout développé celles qui concernent la *théorie des surfaces du second ordre*, assimilée par lui au premier étage de la Géométrie. Nous goûtons peu, nous l'avouons, ces comparaisons si détaillées, dont la première idée est due au savant M. Terquem. En tous cas, elles ne nous paraissent pas de nature, puisqu'on nous affirme que les étages inférieurs ne sont pas construits, à encourager ceux qui, dès à présent, s'occupent des parties les plus élevées de l'édifice.

Quoi qu'il en soit de cette image hardie, qui importe peu d'ailleurs

à notre sujet, nous reconnaissons volontiers que l'Ouvrage de M. Serret ajoute plusieurs propriétés nouvelles à ce qu'on savait déjà sur les surfaces du second ordre, et nous allons essayer de donner à nos lecteurs une idée des principes fondamentaux employés et de la méthode suivie dans le cours de l'Ouvrage.

Jusqu'ici on ne connaissait pas de relation analytique simple liant six points d'une conique ou dix points d'une surface du second ordre; du moins ces relations ne se présentaient pas sous une forme qui fût appropriée aux applications et à la démonstration des théorèmes. Personne, croyons-nous, n'aurait songé à établir une théorie des surfaces du second ordre, en partant de l'équation de la surface passant par neuf points ou tangente à neuf plans quelconques. C'est pourtant ce que fait M. Serret; mais, auparavant, il remplace cette équation par une relation tout à fait équivalente, et dont la forme se prête avec la plus grande facilité aux applications. Cette relation, intéressante en elle-même, une fois établie, le lecteur est conduit sans effort à la démonstration des théorèmes les plus difficiles, ainsi qu'à la construction des premiers et des plus importants problèmes qu'on doit se proposer au début d'une théorie complète des surfaces du second degré. Quelques-uns de ces problèmes n'avaient encore été traités par personne; d'autres, au contraire, ont fait l'objet des travaux de nombreux géomètres. M. Serret emploie pour les résoudre une méthode uniforme dont l'origine est dans le principe fondamental posé presque au début de l'Ouvrage, et dont nous allons essayer de donner une idée à nos lecteurs.

Commençons par le cas le plus simple, celui de la ligne droite. On sait que l'équation de la ligne droite passant par deux points ou, si l'on veut, la relation entre trois points d'une ligne droite, s'obtient en égalant à zéro le déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Mais il y a une proposition très-simple de Géométrie qui tient lieu de cette équation : « Si trois points sont en ligne droite, l'un d'eux peut toujours être considéré comme le centre des moyennes distances du système formé par les deux autres, pourvu qu'on attribue à ces derniers points des masses quelconques. » Il suit de là que, si l'on

désigne par P, P_1, P_2 les distances des trois points à un axe arbitrairement choisi, on a, entre ces distances, la relation

$$\lambda P + \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = 0,$$

où λ, λ_1, λ_2 sont des paramètres fixes affectés à chaque point. En d'autres termes :

Pour que trois points soient en ligne droite, il faut qu'il y ait toujours une même relation linéaire et homogène entre les distances de ces trois points à une droite quelconque.

On connaît toute l'importance de cette proposition dans la théorie de la ligne droite; elle équivaut, en effet, on s'en assure aisément, à l'équation même de la ligne droite, et peut la remplacer dans tous les cas.

C'est cette proposition si utile que M. Serret a étendue aux courbes et aux surfaces de degré supérieur. Voici, par exemple, le théorème pour le cas des sections coniques :

Pour que six points 1, 2, ..., 6 *soient sur une conique, il faut qu'on puisse choisir six coefficients* $\lambda_1, \ldots, \lambda_6$ *tels, qu'en désignant par* $P_1, \ldots, P_6$ *les distances de ces points à une droite quelconque, on ait la relation*

$$\sum_1^6 \lambda_i P_i^2 = 0.$$

Les paramètres λ, bien entendu, ne dépendent en aucune manière de la position de l'axe. Si, pour fixer les idées, on considère le point (i) comme ayant une masse positive ou négative λ_i, l'équation exprime que le moment d'inertie du système des six points par rapport à une droite est toujours nul, quelle que soit la position de cette droite.

M. Serret regarde la proposition comme nouvelle. En réalité, elle a déjà été donnée par M. Hesse dans un opuscule intitulé : *Vier Vorlesungen*... (Quatre leçons de Géométrie analytique...) (*). Dans ce petit Ouvrage, que nous recommandons à l'attention des savants français, M. Hesse donne, en effet, le théorème de M. Serret avec

(*) *Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie* von Dr OTTO HESSE. (Extrait du *Zeitschrift für Mathematik und Physik*; 1866. Teubner, Leipzig.)

quelques autres systèmes de formules dont il déduit d'une manière tout à fait neuve le théorème de Pascal. On trouvera plus loin cette démonstration, que nous avons pris la liberté de traduire, en y faisant quelques changements.

Mais cette proposition arrive incidemment dans l'Ouvrage de l'auteur allemand; elle forme, au contraire, la base même de l'Ouvrage de M. Serret. Nous n'avons pas trouvé d'ailleurs, dans l'excellente *Géométrie analytique à trois dimensions* de M. Hesse, les relations analogues pour les surfaces du second degré et leurs courbes d'intersection. Ces relations, qu'on trouve dans l'Ouvrage de M. Serret, sont les suivantes :

Pour que dix points soient sur une surface du second ordre, il faut et il suffit qu'il y ait entre leurs distances à un plan quelconque P *une relation de la forme*

$$\sum_1^{10} \lambda_1 P_1^2 = 0.$$

De même,

Pour que neuf points soient sur une courbe gauche du quatrième ordre, il faut et il suffit qu'il y ait entre leurs distances à un plan quelconque une relation de la forme

$$\sum_1^{9} \lambda_1 P_1^2 = 0,$$

etc., etc....

Les propositions précédentes conduisent, entre les mains de M. Serret, à des applications aussi nombreuses que variées. Nous donnerons l'un des exemples les plus simples.

Considérons une conique et deux triangles conjugués à cette conique. Soient

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad P_3 = 0$$

les équations tangentielles des sommets du premier triangle conjugué. On sait que l'équation tangentielle de la conique prend la forme simple

$$\lambda_1 P_1^2 + \lambda_2 P_2^2 + \lambda_3 P_3^2 = 0.$$

De même, soient

$$P_4 = 0, \quad P_5 = 0, \quad P_6 = 0$$

les équations des sommets du second triangle conjugué. On aura une deuxième équation de la conique

$$\lambda_4 P_4^2 + \lambda_5 P_5^2 + \lambda_6 P_6^2 = 0.$$

Ces deux équations ne doivent différer que par un facteur constant; à cause de l'indétermination des coefficients λ, on peut supposer que leur somme soit identiquement vérifiée. On a donc l'identité

$$\sum_1^6 \lambda_i P_i^2 = 0.$$

C'est la condition nécessaire et suffisante pour que six points soient sur une conique. On obtient donc ce beau théorème dû au géomètre allemand que nous avons déjà cité :

Les sommets de deux triangles conjugués à une conique sont six points d'une même conique.

La réciproque de ce théorème et les propositions analogues pour l'espace ne se démontrent pas avec une moindre facilité.

L'exemple précédent suffira, croyons-nous, pour faire comprendre à nos lecteurs la marche habituellement suivie par l'auteur. Ne pouvant donner qu'une idée nécessairement imparfaite des nombreuses questions traitées par M. Serret, nous parlerons surtout de la partie la plus importante de l'Ouvrage, celle sur laquelle l'auteur appelle l'attention des géomètres dans sa Préface, c'est-à-dire de la construction des surfaces du second degré et de leurs courbes d'intersection, quand on donne un nombre suffisant de points pour les déterminer.

On sait que les problèmes analogues pour les coniques se résolvent par l'emploi de théorèmes généraux comme le théorème de Pascal, celui de Desargues, celui de M. Chasles, etc. Ces théorèmes établissent tous une relation entre six points d'une conique et peuvent, par conséquent, tenir lieu de l'équation de la courbe. On ne connait pas, malheureusement, de théorème analogue pour les surfaces du second degré. M. Serret s'est proposé d'étendre à l'espace l'une des proportions fondamentales de la théorie des coniques, le théorème de Desargues, et nous croyons qu'il a atteint, au moins en grande partie, le but qu'on doit se proposer dans la généralisation de ces théorèmes.

S'il s'agissait de trouver simplement pour les surfaces du second

ordre une propriété analogue à celle qui, pour les coniques, est exprimée par le théorème de Desargues, on pourrait dire que le problème est résolu depuis longtemps. Sturm, en effet, dans un beau Mémoire inséré aux *Annales de Gergonne*, t. XVII, p. 180, a généralisé le théorème de Desargues et a montré que toutes les coniques passant par quatre points déterminent sur une droite des segments en involution. Cette proposition s'étend d'elle-même aux surfaces ayant une courbe commune d'intersection. Mais, dans l'espace, le théorème perd, au moins en apparence, son utilité; il ne conduit pas à une construction de la surface passant par neuf points, comme le théorème plan à la construction de la conique déterminée par cinq points. M. Serret obtient des généralisations différentes et plus utiles. Nos lecteurs pourront en juger en comparant les deux théorèmes correspondants que nous plaçons à côté l'un de l'autre :

Une corde xy et un quadrilatère $aba'b'$ étant inscrits à une conique, les extrémités de cette corde et ses traces sur les côtés opposés du quadrilatère forment trois couples de points conjugués par rapport à une ellipse infiniment aplatie qui se réduit à un système de deux points situés sur la corde donnée.

(DESARGUES.)

Un quadrilatère plan et un octaèdre $abcda'b'c'd'$ étant inscrits à une surface du second ordre, les deux couples de côtés opposés de ce quadrilatère, les traces de son plan sur les faces opposées de l'octaèdre font six couples de droites conjuguées par rapport à un même ellipsoïde infiniment aplati qui se réduit à une conique située dans le plan du quadrilatère. (PAUL SERRET.)

De même pour la courbe gauche du quatrième ordre :

Un quadrangle inscrit à une conique et le système de deux points formé des traces de la courbe sur une droite quelconque sont l'un et l'autre conjugués à une *même ellipse infiniment aplatie* réduite à un système de deux points situés sur la droite considérée.

(DESARGUES.)

Un pentagone inscrit à une courbe gauche du quatrième ordre et le quadrangle ayant pour sommets les traces de la courbe sur un plan quelconque, sont l'un et l'autre conjugués (*) à un même *ellipsoïde infiniment aplati*, réduit à une conique située dans le plan considéré.

(PAUL SERRET.)

La ressemblance entre les propositions anciennement connues pour le plan, et les propositions nouvelles pour les surfaces est rendue évidente par les comparaisons précédentes. Mais, cette fois, l'analogie

(*) M. Serret dit qu'un pentagone est conjugué par rapport à un ellipsoïde, quand le plan polaire de chaque sommet du pentagone passe par le côté opposé.

qui existe déjà dans les démonstrations des deux théorèmes subsiste encore dans leurs applications. M. Serret montre, en effet, que ses théorèmes conduisent à une construction de la surface du second ordre déterminée par neuf points, de la courbe gauche du quatrième ordre déterminée par huit points, et ont, par conséquent, la même utilité que le théorème de Desargues pour les coniques.

Il subsiste pourtant une différence que nous devons signaler entre ces propositions correspondantes. Le théorème de Desargues établit une relation entre six points *quelconques* d'une conique; la proposition de M. Serret ne donne la relation géométrique entre dix points de la surface que si quatre d'entre eux sont dans un même plan. Peut-être cette légère restriction tient-elle à la nature de la question; en tous cas, les théorèmes nouveaux ont le degré de généralité nécessaire pour les applications que l'auteur avait en vue.

M. Serret n'a pas négligé l'étude d'un problème célèbre dans la théorie des surfaces de second ordre. On sait que toutes les surfaces passant par sept points vont généralement passer par un huitième point. On doit donc se proposer de construire avec la règle ce huitième point quand on connaît les sept premiers. Ce problème, qu'on appelle quelquefois *construction du huitième point,* a été traité par M. Hesse, qui en a donné une très-belle solution (*). L'auteur examine soigneusement la construction de M. Hesse, il indique un cas dans lequel elle tombe en défaut sans que le problème soit réellement indéterminé; enfin il donne des solutions nouvelles et fort simples, déduites d'un principe uniforme.

Il nous resterait à signaler plusieurs belles propriétés des sphères et des polyèdres rencontrées par l'auteur dans ses consciencieuses études. Ne pouvant tout citer, nous indiquerons les deux suivantes comme étant des plus simples et des plus élégantes:

Pour que les milieux des diagonales d'un octaèdre soient dans un même plan, il faut et il suffit que ses six plans soient parallèles à six plans tangents d'un cône de second ordre;

Tout ellipsoïde (**) qui divise harmoniquement quatre des diagonales d'un quadrilatère complet divise harmoniquement les six autres.

(*) Voir *Journal de Crelle,* t. XXVI.

(**) M. Serret appelle, pour abréger, *ellipsoïde* toute surface à centre du second degré.

Nous bornerons là l'examen de cet Ouvrage, qui se recommande aux géomètres par le nom de l'auteur et l'importance des résultats obtenus. Le Livre de M. Paul Serret introduit en Géométrie analytique un principe nouveau et fécond; il sera consulté par toutes les personnes qui voudront se tenir au courant des progrès récents de la Géométrie des surfaces du second ordre.

L'auteur a placé au commencement une Préface écrite avec beaucoup de verve. Cette Préface soulève bien des questions délicates; elle contient plus d'une assertion à laquelle nous ne voudrions pas nous associer. M. Serret nous pardonnera de faire quelques réserves sans entrer dans un examen approfondi que ne comporte pas le plan de cette publication.

G. D.

CASORATI (Dott. Felice), prof. di Calcolo differenziale ed integrale nella R. Università di Pavia. — Teorica delle funzioni di variabili complesse. Volume primo. — Grand in-8; 1868. Pavia, tipografia dei Fratelli Fusi. Prix : 10 francs.

L'Ouvrage dont nous venons de transcrire le titre doit compter, sans contredit, parmi les plus importantes productions scientifiques de ces dernières années. Son but est l'exposition complète de cette branche de l'Analyse que Cauchy a fondée, et dont Riemann a été le second créateur.

Les découvertes de Cauchy ont trouvé dans notre pays de lumineux interprètes et doivent aux géomètres français d'importantes additions. Mais jusqu'ici la doctrine de Riemann ne nous était guère connue que par les Ouvrages de ses disciples, écrits presque tous dans une langue dont l'étude est malheureusement trop sacrifiée chez nous aux prétendues exigences littéraires de l'esprit français. Aussi devons-nous nous réjouir de la publication d'un livre dont la langue est facilement intelligible à tout Français un peu lettré, et composé, en outre, avec un remarquable talent par un géomètre qui, tout jeune encore, a su déjà si bien se rendre maître du vaste ensemble des théories qui gravitent autour de son sujet principal.

Le premier volume, le seul qui ait paru jusqu'à ce jour, se compose de deux Parties principales, dont la première, sous le titre d'*In-*

troduction, contient un aperçu historique du développement de la théorie des quantités complexes. Cet aperçu, qui formerait à lui seul un excellent Mémoire, est un résumé substantiel et méthodique des plus grandes découvertes de l'Analyse moderne, où la part de chaque géomètre est indiquée et appréciée avec autant de clarté que de profondeur. Les cent quarante-trois pages que l'auteur a consacrées à cet objet seront un précieux secours pour tous ceux qui voudront se mettre au courant des hautes théories analytiques, et qui, privés de ce fil conducteur, ne sauraient comment s'orienter au milieu de tant de travaux, différents par l'esprit comme par la forme, et dont rien ne leur indique d'avance la dépendance mutuelle, non plus que l'ordre dans lequel il convient de les étudier.

Cette Introduction est divisée en deux Chapitres, dont le premier contient l'histoire de la théorie des fonctions elliptiques et abéliennes, une des plus importantes applications des quantités complexes, dans laquelle l'emploi de ces quantités a été la condition nécessaire des découvertes d'Abel et de Jacobi. M. Casorati trace le tableau des progrès successifs de cette branche de l'Analyse, depuis les travaux de Fagnani et d'Euler, jusqu'à ceux de Cayley, d'Eisenstein, d'Hermite, de Weierstrass.

Le second Chapitre traite plus particulièrement des variables complexes et des fonctions de ces variables. L'auteur commence naturellement par l'exposé des travaux de Cauchy sur ce sujet; il établit nettement et avec impartialité la part qui revient à ce grand analyste dans des découvertes dont quelques auteurs allemands semblent parfois trop disposés à attribuer tout l'honneur à leurs compatriotes.

Citons, à ce propos, quelques pages de la remarquable étude que M. Beltrami a consacrée au Livre de M. Casorati, dans le *Giornale di Matematiche* de Naples, t. VII, 1869, p. 36 et suiv. Ces pages nous paraissent éminemment propres à faire saisir les points de contact entre l'œuvre de Cauchy et celle de Riemann, et à montrer ce que le second doit au premier :

« Un de ces points de contact se présente dès les premiers pas que l'on fait dans la théorie générale des fonctions, savoir : dans la conception même de la fonction. Déjà Cauchy avait reconnu qu'il convient de faire abstraction de toute supposition, explicite ou implicite, de l'existence d'une formule analytique de nature quelconque, et de ne considérer que la dépendance qui doit avoir lieu entre la valeur

de la variable et celle de la fonction. Mais, dans le passage de la variabilité réelle à la variabilité complexe, Cauchy avait donné à ce principe une extension trop grande, ce qui l'avait conduit à distinguer par une appellation spéciale (*monogènes*) les fonctions auxquelles Riemann, mieux inspiré, a cru devoir réserver exclusivement la dénomination de *fonctions* (d'une variable complexe). Ce point est très-clairement exposé par M. Casorati dans son préambule historique, ainsi que dans les premiers Chapitres de la deuxième Section...

» Quant à la définition d'une fonction au moyen de propriétés caractéristiques suffisantes, ce sujet n'est pas encore traité dans le volume publié, bien que l'auteur laisse entrevoir à plusieurs reprises dans l'*Introduction* (p. 134-136, par exemple) toute l'importance de ce nouveau point de vue, qui, employé primitivement dans les méthodes de la Physique mathématique, et introduit ensuite avec beaucoup d'avantages dans l'Analyse pure, semble se rapprocher singulièrement de celui de la Géométrie moderne, suivant lequel les propriétés des figures s'établissent comme conséquences de quelques données caractéristiques, sans faire aucun usage des équations analytiques.

» Parmi les nombreux mérites qui appartiennent à Cauchy en ce qui touche au perfectionnement général de la science, on doit mettre en première ligne celui d'avoir constamment soutenu, dès le commencement de sa carrière scientifique, la nécessité de bien délimiter l'étendue et la signification de tout symbole que l'on veut introduire et employer dans l'Analyse. En revenant sans cesse sur la discussion des meilleures règles à suivre pour parvenir à ce but, règles qu'il a successivement modifiées sans jamais aboutir à leur donner une forme définitive, il a montré clairement que, si l'on n'était par encore entré dans la seule voie qui conduit sûrement au but, la nécessité d'atteindre ce but ne lui en paraissait pas moins absolue. Et en cela il était dans le vrai. Seulement Cauchy, entraîné, comme cela se voit si souvent, au delà des justes bornes par son ardeur à réagir contre l'abus du symbole, a péché par l'excès contraire, en établissant plus d'une fois ses définitions de façon à interrompre arbitrairement la continuité des variables, et à perdre ainsi de vue le guide infaillible qui aurait dû le diriger.

» Malgré l'imperfection des résultats, l'idée première est tellement vraie, et les considérations qu'il a développées en plusieurs endroits sont si justes, que plus d'un lecteur du tome IV des *Exercices d'Ana-*

lyse et de Physique mathématique a dû trouver de lui-même la véritable voie qui mène à la solution de la difficulté....

» La première Section de l'Ouvrage de M. Casorati est, en grande partie, consacrée à l'exacte détermination du sens qu'il faut attacher aux fonctions simples d'une variable complexe, et les exemples qu'il a choisis nous semblent on ne peut mieux appropriés à ce but, sous le double rapport de la continuité et de la conservation des propriétés caractéristiques.

» Les restrictions qui, comme nous le disions tout à l'heure, ont été imposées mal à propos par Cauchy à la continuité de la variable complexe qui entre dans une fonction donnée, proviennent surtout de ce qu'il prétendait séparer les diverses séries de valeurs dont est susceptible une fonction à plusieurs déterminations, et considérer chacune d'elles comme une fonction séparée. De cette manière, en supposant les valeurs de la fonction placées sur les valeurs correspondantes de la variable (ce que toutefois Cauchy n'avait pas coutume de faire), le champ des valeurs de la fonction devenait simple, mais contenait inévitablement des lignes de discontinuité. Riemann, le premier, a remarqué que, en concevant les divers champs correspondants de cette manière aux diverses séries de valeurs de la fonction, chacun d'eux présentait bien de telles lignes de discontinuité; mais que chacun de ces champs devait nécessairement se raccorder en formant la continuité avec un autre le long d'une de ces lignes, et que l'on pouvait ainsi obtenir un champ entièrement continu, composé de plusieurs couches superposées et connexes, et comprenant la totalité des valeurs de la fonction. Cette remarque a été, sans doute, un trait de génie; mais nous ne porterons pas atteinte à la sagacité de l'illustre novateur, en affirmant que son admirable invention ne pouvait plus se faire longtemps attendre, du jour où l'on commencerait à pénétrer au fond des idées de Cauchy. Ce qui frappe le plus, en effet, dans cette découverte, ce n'est pas tant la conception primitive que la sûreté avec laquelle Riemann s'en rend maître, et en dévoile, du premier coup, la puissance et la fécondité, par la construction de l'édifice colossal et majestueux que quelques instants lui ont suffi pour élever. »

Indiquons maintenant rapidement le contenu des divers Chapitres de la seconde Partie du volume, où l'auteur entre dans l'exposition de la théorie.

Cette Partie est divisée en quatre Sections, comprenant chacune plusieurs Chapitres.

SECTION I. Opérations arithmétiques et formules simples correspondantes.

CHAPITRE I. *Opérations arithmétiques. Extension de l'idée de nombre, et, par suite aussi, des opérations. Continuité.*

CHAPITRE II. *Représentation géométrique des nombres, et constructions correspondantes aux opérations arithmétiques.* — L'auteur y donne une démonstration très-précise et très-complète du célèbre théorème de Jacobi, sur l'impossibilité de l'existence d'une fonction monodrome d'une seule variable, ayant plus de deux périodes. Le Chapitre se termine par une exposition de la représentation sur la sphère des valeurs d'une variable complexe, suivant la méthode indiquée par Riemann, dans ses leçons orales, et publiée par Neumann (*Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*).

CHAPITRE III. *Conventions particulières pour* e^z *et* lz.

SECTION II. Idée de fonction et distinctions fondamentales qui s'y rapportent.

CHAPITRE I. *Fonctions réelles d'une variable réelle.* — L'auteur y traite avec détail des diverses espèces de discontinuité, qui avaient déjà été distinguées par M. Neumann (*). Seulement, M. Casorati ne classe pas parmi les discontinuités les valeurs infinies que M. Neumann désigne sous le nom de *discontinuités polaires*, les valeurs réciproques de la fonction étant continues, et les infinis pouvant disparaître au moyen d'une transformation homographique analogue à celle qui changerait toutes les sections coniques en ellipses.

CHAPITRE II. *Fonctions réelles de plusieurs variables réelles.*

CHAPITRE III. *Fonctions complexes de variables réelles.*

CHAPITRE IV. *Fonctions d'une variable complexe.* — Une fonction de $z = x + yi$ est une fonction dont la valeur ne dépend que de celle du binôme $x + yi$, et qui ne changerait pas si l'on remplaçait les va-

(*) *Voyez* aussi NATANI, *Die höhere Analysis, besonders abgedruckt aus dem Matematischen Worterbuche*, p. 462.

leurs réelles de x et de y par des valeurs complexes quelconques, pourvu que le binôme $x+yi$ restât invariable. Une telle fonction w a une dérivée déterminée par rapport à z. Elle satisfait à l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$\frac{dw}{dx}=\frac{1}{i}\frac{dw}{dy};$$

et si l'on pose $w=u+vi$, u et v étant réels, chacune de ces dernières quantités satisfait à l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{d^2\omega}{dx^2}+\frac{d^2\omega}{dy^2}=0.$$

Cette question est traitée avec beaucoup de détails particuliers à l'auteur, et qui jettent un grand jour sur cette question délicate.

Chapitre V. *Interprétations géométriques de la condition renfermée dans l'idée de fonction d'une variable entièrement indépendante. Recherches géométriques relatives à certaines fonctions particulières.* — Après avoir exposé l'interprétation géométrique des conditions

$$\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dy},\quad \frac{du}{dy}=-\frac{dv}{dx};$$

telle qu'on la retrouve dans l'Ouvrage de MM. Briot et Bouquet (*), l'auteur s'occupe de celle qui a été donnée par Gauss, et qui consiste en ce que les réseaux infinitésimaux qui représentent les valeurs correspondantes de la variable et de la fonction sont composés d'éléments semblables chacun à chacun. Discussion de la représentation des fonctions z^2, z^n, e^z, $\sin z$, $\sin \operatorname{am} z$ et de leurs fonctions inverses.

SECTION III. Revue des expressions analytiques.

Chapitre I. *Classification.* — Distinction des fonctions en algébriques et transcendantes, monodromes et polydromes, etc.

Chapitre II. *Séries.* — Influence de l'ordre des termes d'une série. Opérations rationnelles sur les séries; différentiation, intégration. Séries ordonnées suivant les puissances entières et positives d'une va-

(*) *Théorie des Fonctions doublement périodiques et en particulier des Fonctions elliptiques*, p. 8. In-8; 1859. Librairie Gauthier-Villars (*rare*).

riable; cercle de convergence. Séries contenant des puissances négatives. Séries simples ou doubles, à périodicité simple ou double. Influence du groupement des termes d'une série double. Étude des séries Θ, simples ou multiples. Cette étude, fondée sur une application de la série de Fourier, et présentée par l'auteur avec une remarquable simplicité, semble destinée à entrer, tôt ou tard, dans les Traités d'Algèbre, à la suite de la théorie des fonctions exponentielles et circulaires.

CHAPITRE III. *Produits infinis.* — La théorie de ces produits, tant simples que multiples, est traitée d'une manière analogue à la théorie des séries infinies.

CHAPITRE IV. *Intégrales.* — Ce Chapitre renferme l'exposé des découvertes capitales de Cauchy. L'auteur développe avec beaucoup de soin l'idée d'intégration le long d'un contour donné. Le théorème fondamental relatif à l'intégration d'une différentielle exacte

$$u\,dx + v\,dy$$

le long d'un contour fermé est démontré de deux manières différentes : d'abord par la méthode de Cauchy, reproduite par les auteurs français ; puis par la méthode de Riemann, fondée sur des considérations analogues à celles que Gauss avait employées dans son Mémoire sur l'attraction des ellipsoïdes. Examen des intégrales des fonctions $\frac{1}{z}$, $\frac{1}{z^2+1}$, $\frac{1}{(z-\gamma)^{n+1}}$.

SECTION IV. Analyse des manières dont les fonctions peuvent se comporter, dans l'hypothèse de la monodromie, autour des diverses valeurs de la variable.

CHAPITRE I. *Comment une fonction se comporte autour d'une valeur de la variable pour laquelle elle est monodrome, continue et finie.* — Démonstration de la formule de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_s \frac{f(x)\,dx}{x-z}.$$

Théorème de Cauchy sur le développement d'une fonction monodrome, continue et finie suivant les puissances entières et positives de $z-\gamma$. Conséquences. Indices d'ordre des zéros.

Chapitre II. *Comment une fonction se comporte autour d'une valeur de la variable pour laquelle elle est monodrome, continue et infinie* (dans le sens indiqué au Chapitre I de la Section II). — Détermination d'une fonction rationnelle, infinie de la même manière que la fonction proposée. Indices d'ordre des infinis. Expression de l'indice d'un point au moyen de l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int dlw$.

Chapitre III. *Comment une fonction se comporte autour d'une valeur de la variable pour laquelle, isolément, elle est discontinue.* — Théorème de Laurent. Propriétés des fonctions fondées sur la distinction des discontinuités en séparées et non séparées des infinis.

Chapitre IV. *Examen des manières dont une fonction peut se comporter pour la valeur ∞ de la variable, en supposant qu'autour de cette valeur elle doive être monodrome et continue.* — L'auteur emploie la représentation sur la sphère de Riemann, considérée comme résultant de la déformation du plan. Il introduit le plan antipode, dont l'idée est due à M. Neumann, et qui correspond au changement de la variable z en $\frac{1}{z}$.

Chapitre V. *Comment se comportent, autour de chaque valeur de la variable, la dérivée et l'intégrale d'une fonction, par comparaison avec la fonction elle-même.*

Ces indications, nécessairement incomplètes, ne peuvent donner qu'une idée bien imparfaite de la richesse des matières contenues dans le volume de M. Casorati. Tous ceux qui liront cet Ouvrage désireront, comme nous, avec impatience, que le savant professeur nous donne bientôt la suite, qui doit traiter des parties plus élevées de la théorie qu'il a si bien approfondie, et qu'il expose avec tant de lucidité.

J. Hoüel.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK IN ZWANGLOSEN HEFTEN. — Als Fortsetzung des von A. C. CRELLE : gegründeten Journals, herausgegeben unter Mitwirkung der Herren Schellbach, Kummer, Kronecker, Weierstrass; von C. W. BORCHARDT (*). T. LXXI, n° 1, 15 octobre 1869; n° 2, 15 décembre 1869.

OLIVIER (A.). — *Sur la théorie de la génération des courbes géométriques.* (15 pages.)

Ce travail peut être considéré comme la suite d'articles précédents qui ont pour base les beaux théorèmes de M. Chasles insérés en 1857 aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, sur la génération des courbes de degré supérieur.

WEYR (Eduard). — *Sur un théorème de Steiner.* (2 pages.)

Le théorème dont il est question dans ce court article se rapporte aux vingt-sept points dans lesquels une courbe du troisième degré peut avoir, avec une conique, un contact de l'ordre le plus élevé.

WEYR (Eduard). — *Sur quelques théorèmes de Steiner et sur leur relation avec un mode de transformation dans lequel à un élément de chaque figure correspondent en général deux éléments de l'autre.* (10 pages.)

Si l'on considère deux points P, Q sur une courbe du troisième degré, deux droites passant respectivement par ces deux points, et se coupant sur la courbe, peuvent être considérées comme formant deux faisceaux correspondants. Alors, à une droite de l'un des faisceaux correspondent évidemment deux droites de l'autre. C'est ce mode de correspondance qu'étudie M. Weyr en s'appuyant sur un théorème bien connu de Steiner, relatif à une série de polygones dont les côtés passent successivement par deux points fixes de la courbe du troisième degré.

(*) Ce Journal a été fondé, à la fin de 1825, par Crelle, à une époque où les *Annales de Gergonne* étaient, en Europe, le seul journal consacré aux Mathématiques. Il est dirigé, depuis la mort de Crelle (1856), par M. BORCHARDT. Il paraît par Cahiers détachés in-4 d'à peu près 100 pages. Quatre Cahiers forment un volume. Prix pour l'abonnement à quatre Cahiers : Allemagne, 16 francs; France, 20 francs. Les seize derniers volumes embrassent une période de douze années à peu près.

WEBER (H.). — *Note sur la démonstration, donnée par Riemann, du principe de Dirichlet.* (10 pages.)

Le principe de Dirichlet, dont Riemann a fait des applications si capitales, a été l'objet dans ces derniers temps, au point de vue de la rigueur et de la généralité, d'objections qui paraissent fondées. Le travail de M. Weber est consacré au développement d'une démonstration nouvelle et plus rigoureuse de cet important principe.

BAUER. — *Sur le discriminant de l'équation du troisième degré qui détermine les axes principaux d'une surface du second ordre et la décomposition de ce discriminant en une somme de carrés.* (5 pages.)

La question a été déjà traitée d'une manière très-remarquable par plusieurs savants, notamment par MM. Kummer (*), Borchardt (**), Hesse (***). Ces géomètres avaient examiné l'équation plus générale qu'on rencontre dans la théorie des perturbations des planètes. M. Bauer démontre que, dans le cas du troisième degré, le résultat s'obtient directement d'une manière fort simple.

BAUER. — *Sur les sections circulaires des surfaces du second degré.* (6 pages.)

LORBERG (H.). — *Sur la théorie du mouvement de l'électricité dans les corps à plus d'une dimension.* (37 pages.)

Les équations du mouvement de l'électricité ont été données par M. Kirchhoff dans le tome CII des *Annales de Poggendorff*. M Weingarten avait déjà étudié le mouvement dans les corps linéaires. Le Mémoire de M. Lorberg comprend deux Parties. Dans la première l'auteur reprend les équations de M. Kirchhoff, et les étend au cas où il existe des forces extérieures. La deuxième Partie contient l'application au mouvement de l'électricité dans une sphère.

FUCHS (L.). — *Les modules de périodicité des intégrales hyperelliptiques considérés comme fonctions d'un paramètre.* (45 pages.)

M. Fuchs développe les équations différentielles qui sont analogues

(*) KUMMER. *Journal de Crelle*, t. XXVI, p. 268 : Bemerkungen über die cubische Gleichung durch welche die Hauptaxen der Flächen zweiten Grades bestimmt werden.

(**) BORCHARDT. *Journal de Crelle*, t. XXX; *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, t. XII, p. 50 : Développements sur l'équation à l'aide de laquelle on détermine les inégalités séculaires du mouvement des planètes.

(***) HESSE (Otto D[r]). *Vorlesungen über die anal. Geometrie des Raums*, p. 3?0.

à l'équation du second ordre trouvée par Legendre, et à laquelle satisfait, dans le cas des fonctions elliptiques, l'intégrale complète considérée comme fonction du module. Les équations différentielles trouvées par M. Fuchs sont de degré supérieur au second et variable suivant la classe des fonctions considérées. Le Mémoire se termine par l'application aux fonctions elliptiques.

Fuchs (L.).— *Sur une relation rationnelle entre les modules de périodicité des intégrales hyperelliptiques.* (40 pages.)

L'auteur développe des relations analogues à la célèbre formule

$$KJ' - JK' = \frac{\pi}{2}.$$

Stern. — *Sur les résidus quadratiques, trigonaux et bitrigonaux.* (27 pages.)

Gordan. — *Sur les invariants des formes binaires quand on effectue des transformations de degré supérieur.* (31 pages.)

On n'a guère étudié jusqu'ici les invariants des formes algébriques qu'au point de vue des transformations *linéaires*. M. Gordan s'occupe d'un problème beaucoup plus général, et qui n'a été traité que dans des cas restreints et par un petit nombre de géomètres. C'est celui où les formules de transformation qui donnent les nouvelles variables par rapport aux variables primitives sont d'un degré quelconque par rapport à ces dernières. Il ne faut pas oublier, M. Gordan le dit d'ailleurs, que, dans son travail sur les équations du quatrième et du cinquième degré, M. Hermite avait résolu d'importants problèmes de ce genre.

A. Olivier. — *Recherche de l'ordre d'une courbe qui est engendrée par l'intersection des courbes correspondantes de deux faisceaux.* (2 pages.)

Riemann. — *Démonstration du théorème : « Toute fonction de n variables ayant plus de 2n périodes simultanées est impossible ».* (3 pages.) (Extrait d'une lettre de Riemann à M. Weierstrass.) (*).

(*) Tous les Mémoires contenus dans ces deux Cahiers sont écrits en allemand.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, publiées par M. L. PASTEUR, Membre de l'Institut, avec un Comité de rédaction composé de MM. les Maîtres de Conférence de l'École (*). T. VI; 1869.

DIDON (F.). — *Sur deux systèmes d'équations aux dérivées partielles.* (26 pages.)

Ce travail est la suite des belles études de M. Didon, sur les polynômes introduits dans la science par M. Hermite (voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LVIII et LX *passim*).

DARBOUX (G.). — *Sur un mode de transformation des figures et son application à la construction de la surface du deuxième ordre déterminée par neuf points.* (8 pages.)

SIMON (Ch.). — *Mémoire sur la rotation de la Lune* (deuxième Mémoire). (16 pages.)

DIDON (F.). — *Sur certains systèmes de polynômes associés.* (16 pages.)
Étude sur une classe de polynômes analogues aux fonctions X_n de Legendre.

JACOBI (C. G. J.). — *Lettres sur la théorie des fonctions elliptiques.* (50 pages.)
Ces lettres sont celles que Jacobi a écrites successivement à Legendre pour lui annoncer les belles et importantes découvertes qu'il venait de faire dans la théorie des fonctions elliptiques. Elles nous paraissent destinées à intéresser vivement les savants. Voici comment s'exprime M. Bertrand dans quelques lignes d'introduction placées au commencement de l'article :

« Nous devons à l'obligeance de M. Alfred Arago la précieuse communication de onze lettres inédites de *Jacobi* à *Legendre*, sur la théorie des fonctions elliptiques. Quoique les découvertes qu'elles

(*) Ce Recueil paraît depuis 1864, tous les deux mois, par Cahier de 56 à 64 pages. Prix de l'abonnement par année : Paris, 30 francs (Librairie Gauthier-Villars). Il contient à peu près par moitié des Mémoires de Mathématiques et des Mémoires se rapportant aux Sciences physiques. Nous ne rendrons compte que des Mémoires se rattachant directement aux Mathématiques. Les personnes qui désireront des renseignements plus complets pourront lire un article de M. J. Bertrand, inséré dans le *Journal des Savants*, année 1869, et intitulé : *Annales de l'École Normale supérieure.*

contiennent soient aujourd'hui bien connues des géomètres, ils étudieront sans doute avec un vif intérêt la forme que leur donne l'illustre inventeur; on prendra plaisir à voir Jacobi, avec une modestie digne de son talent, s'incliner devant l'illustre vieillard qu'il a déjà dépassé de si loin, et saluer en même temps par de véritables cris d'admiration les premiers résultats du jeune émule qui vient tout à coup partager sa gloire : « La découverte d'Abel, dit-il, est au-dessus de mes éloges, » comme elle est au-dessus de mes propres travaux. »

» Jacobi seul avait le droit de prononcer un tel jugement, dont la sévérité, sous toute autre plume que la sienne, irait jusqu'à l'injustice. »

Serret (J.-A.). — *Sur un théorème de calcul intégral.* (8 pages.)

Dans cet élégant travail, M. Serret démontre, par des considérations indépendantes du calcul des probabilités, les beaux théorèmes que M. Crofton a fait connaître à l'Académie. La plus importante de ces propositions s'énonce de la manière suivante :

« Soit un contour convexe de forme quelconque, dont la longueur totale est L et qui renferme un espace Ω, si l'on appelle θ l'angle des deux tangentes menées d'un point extérieur (x, y) à ce contour, on aura l'intégrale

$$\int\int(\theta - \sin\theta)\,dx\,dy = \frac{1}{2}L^2 - \pi\Omega$$

pour toute la surface du plan extérieure au contour » (voir *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXV, p. 994).

Baillaud. — *Note sur les séries à termes positifs.* (20 pages.)

Le jeune géomètre examine à un point de vue nouveau les règles que différents auteurs ont fait connaître pour reconnaître la convergence des séries. Il reprend et généralise la règle de Gauss. Enfin il montre que toutes les fois que les règles données par MM. de Morgan, Raabe, Bertrand, Bonnet permettent de reconnaître la convergence ou la divergence, on peut trouver une fonction $\varphi(n)$ telle, que l'examen du produit $u_n\varphi(n)$ permette de décider la question. On sait depuis Abel que cette propriété n'a pas lieu pour toutes les séries.

Aoust. — *Sur l'analyse des courbes rapportées à un système quelconque de coordonnées.* (28 pages.)

Radau (R.). — *Sur la rotation des corps solides.*

Dans cet important travail, l'auteur reprend la théorie de la rotation. Il retrouve et analyse les résultats auxquels avaient été déjà conduits MM. Richelot, Serret, Sylvester.

Beltrami (E.). — *Essai d'interprétation de la Géométrie non euclidienne* (traduit de l'italien par J. Hoüel). (38 pages.)

Ce Mémoire est consacré à l'étude approfondie des surfaces à courbure constante négative. Il sera lu avec fruit par toutes les personnes qui désirent connaître le développement qu'ont reçu dans ces derniers temps les idées de Gauss relatives à l'origine des vérités géométriques. Du reste, les résultats qui y sont énoncés ont une valeur réelle, indépendante de toutes les idées qu'on peut se faire sur le *postulatum* d'Euclide.

Bach (M.). — *Du passage de Vénus sur le disque du Soleil en 1874, et du calcul de la parallaxe du Soleil.* (58 pages.)

Beltrami (E.). — *Théorie fondamentale des espaces de courbure constante* (traduit de l'italien par J. Hoüel). (30 pages.)

Didon (F.). — *Sur une équation aux dérivées partielles.* (4 pages.)

COMPTES RENDUS hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, publiés par MM. les Secrétaires perpétuels (*). T. LXX; 1870.

N° 1. Séance du 3 janvier 1870.

État de l'Académie des Sciences au 1er janvier 1870.

M. Bertrand. — Sur la démonstration relative à la somme des angles d'un triangle.

(*) Ces *Comptes rendus* paraissent régulièrement tous les dimanches, depuis 1835, en un Cahier de 32 à 40 pages, quelquefois de 80 à 120. Ils forment, à la fin de l'année, deux volumes in-4, ensemble de 2400 à 3000 pages. Deux Tables, l'une par ordre alphabétique de matières, l'autre par ordre alphabétique de noms d'auteurs, terminent chaque volume. Prix de l'abonnement par an : Paris, 20 francs (Librairie Gauthier-Villars). Les extraits des Mémoires lus par les membres de l'Académie comprennent au plus 8 pages par numéro; les Notes des personnes qui ne sont pas membres de l'Académie ne peuvent dépasser 4 pages.

Nous ne parlerons que des Mémoires se rattachant aux Mathématiques et à l'Astronomie.

P. Secchi. — Lettre à M. le Secrétaire perpétuel sur la constitution de l'auréole solaire et sur quelques particularités des tubes de Geissler.

M. Boussinesq. — Essai sur la théorie de l'écoulement d'un liquide par un orifice en mince paroi.

N° 2. Séance du 10 janvier 1870.

M. Delaunay. — Sur la constitution physique de la Lune.

P. Secchi. — Sur la constitution de l'auréole solaire. (Article dont il a été fait mention plus haut.)

M. Piarron de Mondesir. — Nouvelle méthode pour la solution des problèmes de la Mécanique (2e Partie).

N° 3. Séance du 17 janvier 1870.

M. Delaunay présente un Rapport sur les importantes recherches de M. Puiseux, relatives à la théorie de la Lune. Nous reproduisons ce Rapport, qui donnera à nos lecteurs une idée très-nette du point sur lequel ont porté les recherches de M. Puiseux :

« Lorsqu'on veut déterminer toutes les inégalités du mouvement de la Lune dues à l'action perturbatrice du Soleil, on doit attribuer à ce dernier astre, à chaque instant, la position exacte qu'il occupe par rapport à un système d'axes coordonnés de directions constantes passant par le centre de la Terre. Les coordonnées du Soleil, que l'on doit aussi considérer, sont exactement les mêmes que celles de la Terre rapportées à un système d'axes parallèles et de sens contraires, menés par le centre du Soleil. C'est donc, en définitive, le mouvement de la Terre autour du Soleil qui permet d'obtenir les coordonnées du Soleil dont on a besoin pour effectuer le calcul des inégalités lunaires.

» Si l'on admet, dans une première recherche, que la Terre se meut autour du Soleil en suivant rigoureusement les lois du mouvement elliptique, on obtient ainsi la plus grande partie des inégalités dont le mouvement de la Lune est affecté; c'est en cela que consiste le travail publié récemment par l'un de nous, et formant les tomes XXVIII et XXIX des *Mémoires de l'Académie*. Mais les inégalités du mouvement de la Terre, qui doivent être jointes à son mouvement elliptique considéré seul d'abord, pour fournir son mouvement réel autour du Soleil, contribuent aussi à produire, dans le mouvement de la

Lune, des inégalités qu'il n'est pas possible de négliger. Parmi ces inégalités du mouvement de la Lune, dues à l'existence des inégalités du mouvement de la Terre, une des plus importantes est celle qui affecte progressivement le moyen mouvement de notre satellite. Laplace a démontré, en 1787, que la diminution séculaire de l'excentricité de l'orbite de la Terre produit une accélération progressive dans le moyen mouvement lunaire; et il a levé par là une difficulté qui préoccupait beaucoup les savants, en dévoilant la cause de l'accélération séculaire découverte depuis longtemps dans ce moyen mouvement de la Lune, par l'examen attentif des données de l'observation. A partir de là, et jusqu'à ces derniers temps, on a regardé la cause assignée par Laplace comme correspondant complétement à l'effet qu'il s'agissait d'expliquer; mais des doutes se sont produits, il y a quelques années, sur l'exactitude de cette correspondance : un calcul plus complet de l'effet produit sur le moyen mouvement de la Lune par la diminution séculaire de l'excentricité de l'orbite de la Terre, a conduit à penser que cette cause trouvée par Laplace ne rendait compte que d'une portion de l'accélération séculaire qui affecte réellement ce moyen mouvement. On s'est demandé tout naturellement à quelle autre cause la partie restante pourrait être attribuée, et diverses idées ont été émises à ce sujet. Mais avant tout, il était bon de s'assurer si l'on avait bien tenu compte de tous les effets de ce genre que peut produire l'action perturbatrice du Soleil sur la Lune.

» Parmi les inégalités dont le mouvement elliptique d'une planète est affecté, la variation séculaire de l'inclinaison de son orbite sur un plan fixe et celle de l'excentricité de cette orbite jouent des rôles entièrement analogues; le déplacement séculaire du plan de l'écliptique dans l'espace ne pourrait-il donc pas produire une accélération dans le moyen mouvement de la Lune, tout aussi bien que la diminution progressive de l'excentricité de l'orbite de la Terre? Telle est la question que M. Puiseux s'est posée.

» Les divers savants qui se sont occupés du mouvement de la Lune avaient toujours regardé l'influence du déplacement progressif de l'écliptique sur le moyen mouvement de cet astre comme insensible; mais c'était en se bornant aux premières approximations qu'ils avaient été conduits à ce résultat, et l'on sait combien, dans la théorie de la Lune, les conclusions tirées des premières approximations auxquelles on s'est arrêté tout d'abord se trouvent quelquefois changées

lorsqu'on passe aux approximations suivantes. M. Puiseux a donc entrepris d'effectuer le calcul de la partie de l'équation séculaire de la Lune qui peut être due au déplacement séculaire du plan de l'écliptique, en poussant les approximations assez loin pour qu'il ne restât aucun doute sur la véritable influence de cette cause spéciale de perturbation.

» Nous n'entrerons dans aucun détail sur la marche que l'auteur a suivie pour atteindre ce but. Nous nous contenterons de dire que, dans le développement des longs et pénibles calculs qu'il a eu à faire pour y arriver, on retrouve la netteté et la précision qui sont le caractère distinctif de ses travaux. Quant au résultat, il est le même que celui auquel on était parvenu en se bornant aux premières approximations : le changement de position du plan de l'écliptique dans l'espace n'a aucune influence sensible sur la valeur de l'équation séculaire de la Lune. Cette conséquence, bien qu'elle soit négative, n'en a pas moins une grande importance; et tous les amis de la science se féliciteront de ce que le doute qui pouvait rester sur ce point soit complétement dissipé.

» Nous proposons à l'Académie de décider que le Mémoire de M. Puiseux sera inséré dans le *Recueil des Savants étrangers.* »

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

N° 4. Séance du 24 janvier 1870.

M. Piarron de Mondesir. — Nouvelle méthode pour la solution des problèmes de la Mécanique (3e Partie).

N° 5. Séance du 31 janvier 1870.

M. Boussinesq. — Essai sur la théorie de l'écoulement d'un liquide par un orifice en mince paroi (suite).

N° 6. Séance du 7 février 1870.

M. de Saint-Venant. — Rapport sur un Mémoire de M. Maurice Levy, présenté le 3 juin 1867, reproduit le 21 juin 1869, et intitulé : « Essai sur une théorie rationnelle de l'équilibre des terres fraîchement remuées, et ses applications au calcul de la stabilité des murs de soutènement. »

M. de Saint-Venant. — Sur une détermination rationnelle, par

approximation, de la poussée qu'exercent des terres dépourvues de cohésion, contre un mur ayant une inclinaison quelconque.

M. Laussedat. — Sur les applications utiles de la méthode graphique à la production des éclipses de Soleil.

M. Heis. — La lumière zodiacale observée à Munster, en Westphalie, les 25 et 30 janvier.

M. Heis. — Aurores boréales observées au même lieu, le 30 janvier et le 1er février.

M. Piarron de Mondesir. — Nouvelle méthode pour la solution des problèmes de la Mécanique (4e et dernière Partie).

MÉLANGES.

DES RELATIONS ANALYTIQUES ENTRE SIX POINTS SITUÉS SUR UNE CONIQUE;

Par M. O. HESSE.

Traduit de l'allemand. (*Voir* p. 11.)

Le théorème de l'hexagone de Pascal fournit un moyen très-simple de reconnaître, par la Géométrie, quand six points sont situés sur une conique; mais on ne connaît pas encore de relation analytique simple entre les équations (tangentielles) de six points situés sur une conique. Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, d'établir de telles relations.

Soit $W = 0$ l'équation *tangentielle* d'un point pris arbitrairement sur une conique. Il est clair que cette équation peut se mettre sous la forme

$$(1) \qquad W = A + B\lambda + C\lambda^2 = 0,$$

où A, B, C sont trois fonctions linéaires des coordonnées. En effet tous les points définis par l'équation précédente, quand on fait varier λ, se trouvent sur la conique dont l'équation tangentielle est

$$B^2 - 4AC = 0.$$

D'après cela, six points situés sur une conique, 1, 2,..., 6 peuvent être déterminés par les équations

$$(2) \qquad W_1 = 0, \quad W_2 = 0, \ldots, \quad W_6 = 0,$$

où $W_1, W_2, \ldots, W_6$ désignent les expressions suivantes :

$$(3)\qquad \begin{cases} W_1 = A + B\lambda_1 + C\lambda_1^2, \\ W_2 = A + B\lambda_2 + C\lambda_2^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ W_6 = A + B\lambda_6 + C\lambda_6^2, \end{cases}$$

les six quantités λ_i désignant six valeurs tout à fait arbitraires de la variable λ qui figure dans l'équation (1).

Il existe entre les six expressions W de remarquables relations qui se déduisent toutes d'un théorème bien connu de la théorie des fractions rationnelles.

Si l'on désigne par $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_6$ les produits des six quantités λ définis par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \pi_1 &= (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)\ldots(\lambda_1 - \lambda_6), \\ \pi_2 &= (\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)\ldots(\lambda_2 - \lambda_6), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \pi_6 &= (\lambda_6 - \lambda_1)(\lambda_6 - \lambda_2)\ldots(\lambda_6 - \lambda_5); \end{aligned}$$

et si d'ailleurs $\varphi(\lambda)$ désigne une fonction quelconque, du quatrième degré au plus, de λ, on sait qu'on aura identiquement

$$(4)\qquad \frac{\varphi(\lambda_1)}{\pi_1} + \frac{\varphi(\lambda_2)}{\pi_2} + \ldots + \frac{\varphi(\lambda_6)}{\pi_6} = 0.$$

Posons dans cette formule $\varphi(\lambda) = W^2$, nous serons conduits au théorème suivant :

Si $W_1 = 0, W_2 = 0, \ldots, W_6 = 0$ *sont les équations tangentielles de six points d'une conique, on peut toujours déterminer six grandeurs* $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_6$ *telles, que l'on ait identiquement*

$$(5)\qquad \frac{W_1^2}{\pi_1} + \frac{W_2^2}{\pi_2} + \ldots + \frac{W_6^2}{\pi_6} = 0.$$

Il est vrai que, d'après les équations (3), les six expressions W ont une forme tout à fait déterminée; mais, sous quelque forme que soient écrites les équations de nos six points, il est clair qu'elles ne diffèrent des six équations (3) que par des multiplicateurs constants, en sorte que les équations les plus générales des six points seraient de la forme

$$V_1 = a_1 W_1 = 0, \quad V_2 = a_2 W_2 = 0, \ldots, \quad V_6 = a_6 W_6 = 0.$$

L'équation (5) devient alors

$$\frac{V_1^2}{a_1^2 \pi_1} + \frac{V_2^2}{a_2^2 \pi_2} + \ldots + \frac{V_6^2}{a_6^2 \pi_6} = 0,$$

et l'on voit qu'*elle conserve la même forme*. Toutefois les facteurs constants $a_1^2 \pi_1$ n'ont plus la signification simple qui leur avait été attribuée, et ne représentent plus les produits des différences des six quantités λ. On peut d'ailleurs donner du théorème qui précède une démonstration directe qui permettra d'établir la réciproque.

A cet effet considérons six points d'une conique, dont les coordonnées homogènes soient : $x_1\, y_1\, z_1,\; x_2\, y_2\, z_2, \ldots,\; x_6\, y_6\, z_6$. Soit

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy = 0$$

l'équation de la conique, on aura les six équations

$$(6) \qquad \begin{cases} Ax_1^2 + A'y_1^2 + \ldots = 0, \\ Ax_2^2 + A'y_2^2 + \ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Ax_6^2 + A'y_6^2 + \ldots = 0, \end{cases}$$

qui expriment que les six points sont sur la conique.

On peut toujours évidemment déterminer six grandeurs $\pi_1, \ldots, \pi_6$, telles, que cinq des six équations suivantes soient satisfaites :

$$(7) \qquad \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{\pi_1} + \dfrac{x_2^2}{\pi_2} + \ldots + \dfrac{x_6^2}{\pi_6} = 0, \\ \dfrac{y_1^2}{\pi_1} + \dfrac{y_2^2}{\pi_2} + \ldots + \dfrac{y_6^2}{\pi_6} = 0, \\ \dfrac{z_1^2}{\pi_1} + \dfrac{z_2^2}{\pi_2} + \ldots + \dfrac{z_6^2}{\pi_6} = 0, \\ \dfrac{y_1 z_1}{\pi_1} + \dfrac{y_2 z_2}{\pi_2} + \ldots + \dfrac{y_6 z_6}{\pi_6} = 0, \\ \dfrac{x_1 y_1}{\pi_1} + \dfrac{x_2 y_2}{\pi_2} + \ldots + \dfrac{x_6 y_6}{\pi_6} = 0, \\ \dfrac{z_1 x_1}{\pi_1} + \dfrac{z_2 x_2}{\pi_2} + \ldots + \dfrac{z_6 x_6}{\pi_6} = 0. \end{cases}$$

Or, si l'on divise les équations (6) respectivement par $\pi_1, \ldots, \pi_6$ et qu'on les ajoute par lignes verticales, on voit que de cinq équations du système (7) résulte toujours la sixième.

Les systèmes (6) et (7), sont donc équivalents et le second, aussi bien que le premier, suffit à exprimer que les six points $1, 2, \ldots, 6$ sont sur une conique.

Cela posé, multiplions les équations (7) par u^2, v^2, w^2, $2vw$, $2uv$, $2wu$ respectivement, et ajoutons-les par lignes verticales. Le coefficient de $\frac{1}{\pi_i}$ sera $(ux_i + vy_i + wz_i)^2$. Posons $W_i = ux_i + vy_i + wz_i$, $W_i = 0$ sera l'équation tangentielle du point $x_i y_i z_i$, et l'on aura *identiquement*

$$\frac{W_1^2}{\pi_1} + \frac{W_2^2}{\pi_2} + \ldots + \frac{W_6^2}{\pi_6} = 0.$$

C'est l'équation de condition (5). Si l'on exprime d'ailleurs que cette équation est identique, c'est-à-dire vérifiée, qu'elles que soient les valeurs du u, v, w, elle se décompose dans les six équations (7). On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si $W_1 = 0$, $W_2 = 0, \ldots, W_6 = 0$ *sont les équations de six points, et si les premiers membres de ces équations satisfont à une équation identique de la forme* (5), *les six points sont sur une conique.*

L'équation (5) a été obtenue en remplaçant, dans l'équation (4), $\varphi(\lambda)$, qui est une fonction du quatrième degré au plus, par W^2. On peut encore remplacer $\varphi(\lambda)$ par W ou λW ou $\lambda^2 W$, et l'on obtient les nouvelles équations identiques

$$(8) \qquad \begin{cases} \frac{1}{\pi_1} W_1 + \frac{1}{\pi_2} W_2 + \ldots + \frac{1}{\pi_6} W_6 = 0, \\ \frac{\lambda_1}{\pi_1} W_1 + \frac{\lambda_2}{\pi_2} W_2 + \ldots + \frac{\lambda_6}{\pi_6} W_6 = 0, \\ \frac{\lambda_1^2}{\pi_1} W_1 + \frac{\lambda_2^2}{\pi_2} W_2 + \ldots + \frac{\lambda_6^2}{\pi_6} W_6 = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Si $W_1 = 0, \ldots, W_6 = 0$ *sont les équations de six points d'une conique, on peut toujours trouver six arbitraires* λ *et six arbitraires* π, *telles, que les trois équations* (8) *aient lieu identiquement.*

La réciproque de cette proposition est encore vraie :

Si $W_1 = 0$, $W_2 = 0, \ldots, W_6 = 0$ *sont les équations de six points, et*

si l'on peut trouver six arbitraires λ, et six autres constantes π, telles, que les équations (8) *aient lieu identiquement, les six points seront sur une conique.*

Pour établir cette réciproque, nous montrerons que, lorsque les équations (8) ont lieu, les six points forment un hexagone de Pascal, c'est-à-dire un hexagone dont les côtés opposés se rencontrent en trois points p, q, r situés sur une même droite.

A cet effet, nous remarquerons qu'en éliminant deux des symboles W, les équations (8) fournissent de nouvelles identités, ne contenant que quatre de ces symboles. Multiplions, par exemple, pour éliminer W_5, W_6, les trois équations respectivement par

$$\lambda_5 \lambda_6, \quad -(\lambda_5 + \lambda_6), \quad 1,$$

et ajoutons. Nous obtenons

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_6)\frac{W_1}{\pi_1} + (\lambda_2 - \lambda_5)(\lambda_2 - \lambda_6)\frac{W_2}{\pi_2} \\ &+ (\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_6)\frac{W_3}{\pi_3} + (\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_6)\frac{W_4}{\pi_4} = 0. \end{aligned} \right.$$

On obtient de cette manière, en éliminant W_3 et W_6, W_1 et W_4, W_2 et W_5, les équations identiques

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} &(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_6)\frac{W_1}{\pi_1} + (\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_6)\frac{W_2}{\pi_2} \\ &+ (\lambda_4 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_6)\frac{W_4}{\pi_4} + (\lambda_5 - \lambda_3)(\lambda_5 - \lambda_6)\frac{W_5}{\pi_5} = 0, \\ &(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_1)\frac{W_2}{\pi_2} + (\lambda_3 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_1)\frac{W_3}{\pi_3} \\ &+ (\lambda_5 - \lambda_4)(\lambda_5 - \lambda_1)\frac{W_5}{\pi_5} + (\lambda_6 - \lambda_4)(\lambda_6 - \lambda_1)\frac{W_6}{\pi_6} = 0, \\ &(\lambda_3 - \lambda_5)(\lambda_3 - \lambda_2)\frac{W_3}{\pi_3} + (\lambda_4 - \lambda_5)(\lambda_4 - \lambda_2)\frac{W_4}{\pi_4} \\ &+ (\lambda_6 - \lambda_5)(\lambda_6 - \lambda_2)\frac{W_6}{\pi_6} + (\lambda_1 - \lambda_5)(\lambda_1 - \lambda_2)\frac{W_1}{\pi_1} = 0. \end{aligned} \right.$$

Soient maintenant les trois équations suivantes, *qui ne sont plus*

des identités et qui représentent trois points en coordonnées tangentielles:

$$p)\qquad (\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_6)\frac{W_1}{\pi_1}+(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_6)\frac{W_2}{\pi_2}=0,$$

$$q)\qquad (\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_1)\frac{W_2}{\pi_2}+(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_1)\frac{W_3}{\pi_3}=0,$$

$$r)\qquad (\lambda_3-\lambda_5)(\lambda_3-\lambda_2)\frac{W_3}{\pi_3}+(\lambda_4-\lambda_5)(\lambda_4-\lambda_2)\frac{W_4}{\pi_4}=0.$$

Considérons l'un de ces points, le premier par exemple. En vertu de la première des identités (10), son équation pourrait s'écrire

$$(\lambda_4-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_6)\frac{W_4}{\pi_4}+(\lambda_5-\lambda_3)(\lambda_5-\lambda_6)\frac{W_5}{\pi_5}=0.$$

On voit donc que ce point est à la fois sur les côtés (12) d'après la première équation, et (45) d'après la seconde. C'est donc le point d'intersection des deux cotés opposés (12) et (45) de l'hexagone. On verrait de même que le point q) est à l'intersection des cotés (23) et (56) et le point r) à l'intersection des cotés (34) et (61).

D'ailleurs si l'on multiplie les trois équations p), q), r), par

$$(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_5),\quad (\lambda_2-\lambda_6)(\lambda_3-\lambda_5),\quad (\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_6),$$

et qu'on les ajoute, on retrouve l'équation identique (9), multipliée par $(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_4-\lambda_2)$. Puisque les équations des trois points ont une somme identiquement nulle, les trois point sont en ligne droite, ce qui est le théorème de Pascal (*).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Annuaire pour l'an 1870, publié par le Bureau des Longitudes, avec des Notices scientifiques. In-18 jésus, 635 pages. Paris, Gauthier-Villars. 1 fr. 25 c.

(*) On pourrait déduire de la méthode de M. Hesse les théorèmes plus compliqués relatifs aux différents hexagones de Pascal. Nous pourrons revenir sur ce sujet dans une autre occasion. G. D.

Argelander (F. W. A.). — Beobachtungen und Rechnungen über veränderliche Sterne. Gr. in-4. Bonn, Marcus. 2 thlr.

Bertin (E.). — Étude sur la houle et le roulis. Gr. in-8; 1869. Cherbourg, Bedelfontaine.

Bertrand (J.). — Traité de Calcul différentiel et intégral (*Calcul intégral*. Première Section : *Intégrales définies et indéfinies*). In-4, xii-725 pages, avec figures dans le texte; 1870. Paris, Gauthier-Villars. 30 fr.

Bienaymé (I. J.). — Sur un principe que Newton avait cru découvrir et qu'il avait appelé : *Loi des grands nombres*. In-8, 14 pages. Paris, Anger.

Berichte der zur Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss d. J. 1868, nach Aden unternommenen österr. Expédition. 7 Bericht (Schluss); Lex. in-8. Wien, Gérold. 12 ngr.

Bassac. — Topographie de précision, méthode de cheminement au théodolite. In-8, xxiv-81 pages, 5 tableaux et 1 plan. Noyen, Audrieux.

Connaissance des Temps ou *des mouvements célestes*, à l'usage des astronomes et des navigateurs, pour l'an 1871, publié par le Bureau des Longitudes. Gr. in-8; 1869. Paris, Gauthier-Villars.

Avec additions. 6 fr. 50 c.

Sans additions. 3 fr. 50 c.

Drew (W. H.). — A Geometrical Treatise on conic Sections; with numerous examples. 4e édition, 136 pages, cloth. London, Macmillan. 4 sh. 6 d.

Duda (Th.). — Versuch einer naturgemässen Entwickelung der Aehnlichtkeitslehre. Brieg, Bänder's Buchh. $\frac{1}{6}$ thlr.

Geiser (C. F.). — Einleitung in die Synthetische Geometrie. Ein Leitfaden beim Unterrichte an höheren Realschulen und Gymnasien. Gr. in-8. Leipzig, Teubner. 1 thlr.

Hesse (O.). — Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, insbesond uber Oberflächen zweiter ordnung. 2 Aufl. Gr. in-8. Leipzig, Teubner. 3 $\frac{1}{3}$ thlr.

Kommerel. — Aufgaben sammlung aus der darstellenden Geometrie. Gr. in-4. Geh. Tübingen, Fues. 12 ngr.

Matthiessen (L.). — Commentar zur Sammlung von Beispielen und

Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra, von E. Heis. Gr. in-8. Köln, Du Mont, Schauberg. $\frac{2}{3}$ thlr.

Price (B.) — A Treatise on Infinitesimal Calculus. Vol. 3, 2e édit. In-8, 682 pages, cloth. London, Macmillan. 16 sh.

Riemann (B.). — Partielle Differential-Gleichungen und deren Anwendung auf Physikalische Fragen vorlesungen, für den Druck bearbeitet und herausgegeben, von K. Hattendorf. Gr. in-8. Braunschweig, Vieweg und Sohn. 2 thlr.

Salmon (G.). — Traité de Géométrie analytique (*sections coniques*); traduit de l'anglais par MM. Resal et Vaucheret. In-8, avec figures dans le texte; 1870. Paris, Gauthier-Villars. 10 fr.

Salmon (G.). — Elementi di geometria analitica a tre coordinate, estratti dal trattato di G. Salmon, per N. Salvatore Dino. In-8, 105 pages. Napoli, Pellerano. 3 l. 50 c.

Schlömilch (O.). — Fünfstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln, 2 Ausfl. Braunschweig, Vieweg. $\frac{2}{3}$ thlr.

Stéphan. — Rapport sur l'observation de l'éclipse de Soleil du 18 août 1868. In-8, 76 pages, avec plusieurs cartes et photographies. Paris, Imprimerie impériale. (Extrait des *Archives des missions scientifiques*.)

Todhunter (J.). — Trattato sul Calcolo differenziale con molti esempli. Versione dall' inglese con aggiunte, per G. Battaglini. In-8, 440 pages. Napoli, Pellerano. 6 l.

Todhunter (J.). — Plane Trigonometry for Colleges and Schools. 4e édit., in-8, 292 pages, cloth. London, Macmillan. 5 sh.

Tychsen (C.). — Grund principerne for Differentiation og Integration af Funktioner med een og to uafhaengige variable. Til Brug ved Selvundervisning, 156 sider, 18. Kjöhenhavn, Steen. 1 rd 24 b.

Weyr (E.). — Theorie der mehrdeutigen geometrischen Elementargebilde u. der algebraïschen Curven u. Flächen als deren Erzeugnisse. Gr. in-8. Leipzig, Teubner. 18 ngr.

Winckler (A.). — Uber einige vielfache Integrale. Lex.8. Wien, Gerold. 3 ngr.

Zetsche (K. E.). — Leitfaden für den Unterricht in der ebenen und raümlichen Geometrie. Lex.8. Chemnitz, Brunner. 18 ngr.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

BERTRAND (J.), membre de l'Institut, professeur à l'École Polytechnique et au Collége de France. — TRAITÉ DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL. *Calcul intégral. Intégrales définies et indéfinies.* — In 4°, XII-725 pages ; 1870. Paris, Gauthier-Villars. Prix : 30 francs.

« Ce Volume, qui fait suite au *Traité de Calcul différentiel*, publié il y a six ans déjà, en 1864, contient la première Section du Calcul intégral. Les intégrales définies et indéfinies y sont étudiées avec le développement que m'a paru comporter, sur ce sujet presque illimité, un livre qui, pour les géomètres, doit rester l'exposition élémentaire des principes. Mon intention, en effet, je tiens à le répéter, n'est pas de remplacer, par la lecture attentive d'un seul ouvrage, l'étude laborieuse des œuvres originales qui ont créé la science : une telle tâche, heureusement, serait impossible. Si je puis enseigner à ceux qui me prendront pour guide ce que j'appellerais volontiers la *Grammaire* et la langue des hautes Mathématiques, et accroître, loin de le diminuer, le nombre des lecteurs des Lagrange, des Gauss, des Abel, des Jacobi et des Cauchy, j'aurai rendu à la science un service très-modeste, mais de réelle importance. »

Ces quelques lignes, qui forment le début de l'Avertissement placé au commencement du Volume, indiquent, avec toute la netteté possible, le but que s'est proposé M. Bertrand. Tous les géomètres connaissent d'ailleurs et ont soigneusement étudié le Calcul différentiel dont la première édition est maintenant épuisée. Tandis que ce premier Volume amenait, comme le désirait l'auteur, les jeunes géomètres à l'étude des Mémoires originaux écrits par les maîtres de la science, il fournissait aux savants déjà exercés la première idée de remarquables travaux sur des points importants mis pour la première fois en lumière et développés avec la plus grande simplicité. Le Calcul intégral n'aura pas une influence moins heureuse, nous l'espérons, sur le progrès des études ; il était attendu avec impatience, et l'accueil qu'il recevra du public récompensera M. Bertrand du travail considérable qu'il a dû s'imposer pour la publication d'une œuvre aussi importante, et qui, dans l'état actuel de la science, paraissait presque au-dessus des forces d'une seule personne.

Avant d'entrer dans l'examen des différents Chapitres, disons quelques mots de la méthode qui nous paraît avoir été suivie dans l'exposition de ces théories si diverses et souvent si peu directes du Calcul intégral. Dès les premières pages, le lecteur appréciera sans doute l'ordonnance parfaite qui règne dans les différentes parties de l'exposition. Les géomètres très-habiles pourront, peut-être, désirer des démonstrations plus complètes et plus développées sur quelques points; l'essentiel, à nos yeux, c'est que les objections auxquelles peut prêter une démonstration généralement admise, les cas particuliers dans lesquels elle peut n'avoir aucune valeur soient indiqués avec précision, et c'est ce que ne manque jamais de faire M. Bertrand. Les jeunes étudiants, surtout, devront lui être reconnaissants de cette méthode par laquelle, sans les induire en erreur, on leur épargne ce que la science a de plus ardu et de moins intéressant, tout en leur donnant les moyens de continuer leurs études, et de lire avec fruit les Mémoires les plus difficiles, où les différentes questions sont traitées de la manière la plus complète et la plus détaillée.

Grâce aux limites imposées au développement des différents sujets, le livre, tout en étant suffisamment complet, se lit sans fatigue; chaque Chapitre et presque chaque page contiennent d'importantes démonstrations, propres à exciter vivement l'intérêt et présentées avec la clarté que connaissent les lecteurs et les élèves de M. Bertrand. C'est ainsi que nous avons réussi, pour la première fois, à bien comprendre le système nouveau et si difficile de représentation de Riemann. L'exposition rapide qu'en fait M. Bertrand aura le mérite, si la méthode de Riemann n'est pas abandonnée, de conduire plusieurs géomètres à l'étude des beaux Mémoires écrits par ce savant, dont la science entière déplore la mort prématurée et qui paraît avoir été aussi remarquable par les qualités aimables du cœur que par la distinction de son esprit (*).

L'Ouvrage se compose de trois Livres principaux dont nous allons indiquer rapidement le contenu.

LIVRE I. Intégrales définies et indéfinies.

CHAPITRE Ier. *Diverses méthodes pour l'intégration des différentielles.*

Préliminaires. Le § IV traite de quelques sommations réduites à

(*) Voir B. RIEMANN, *Équations aux dérivées partielles publiées par K. Hattendorf, Préface*, et *Notice sur Riemann* dans les *Actes de la Société de Göttingue.*

des intégrales, par exemple la somme

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

lorsque n croît indéfiniment. Fonctions hyperboliques.

Chapitre II. *Intégration des fractions rationnelles.*

Chapitre III. *Intégration des différentielles algébriques irrationnelles.*

C'est à la fin de ce Chapitre qu'est traitée la réduction des intégrales elliptiques à la forme normale. Cette disposition offre l'avantage de dégager et de simplifier à l'avance la théorie des fonctions elliptiques. La méthode de réduction employée est celle qui résulte de la *transformation linéaire* de la forme

$$y = \frac{\alpha x + \beta}{\alpha' x' + \beta'}.$$

L'auteur termine par l'examen de quelques intégrales se ramenant aux intégrales elliptiques.

Chapitre IV. *Intégration des fonctions trigonométriques et exponentielles.*

Chapitre V. *Sur l'impossibilité de certaines intégrations.*

Cet important Chapitre contient le résumé des travaux d'Abel et de M. Liouville sur l'impossibilité de certaines intégrations. L'étude de ces travaux est justifiée par leur intérêt propre, l'ordre d'idées suivi l'amenait d'ailleurs d'une manière nécessaire. Après avoir exposé les différentes méthodes d'intégration, après avoir montré qu'elles ne réussissent que dans un nombre restreint de cas, il était bon d'expliquer que certaines intégrations sont tout à fait impossibles avec le nombre limité de *signes de fonctions* adoptés par les géomètres. Le Chapitre contient l'exposé des démonstrations de M. Liouville, au moins dans les cas les plus simples, et se termine par une application de la méthode d'Abel au cas où l'intégrale $\int \frac{P\,dx}{\sqrt{R}}$ contient un seul logarithme.

Chapitre VI. *Calcul direct des intégrales définies.*

Chapitre VII. *Emploi des séries dans le calcul des intégrales définies.*

On trouvera, à la fin de ce Chapitre, quelques formules très-géné-

rales dues à Poisson, Abel, Jacobi, Kummer, et contenant des fonctions arbitraires. Ces formules, néanmoins, sont soumises à quelques restrictions qui sont soigneusement indiquées. Toutefois la formule suivante

$$\int_0^\pi \varphi^{(i)}(\cos x)\sin^{2i} x\,dx = 3.5\ldots(2i-1)\int_0^\pi \varphi(\cos x)\cos ix\,dx$$

est vraie dans tous les cas, comme cela résulte de la seconde démonstration donnée p. 174.

Chapitre VIII. *Différentiation et intégration sous le signe* $\int$. *Application au calcul des intégrales définies.*

Chapitre IX. *Intégrales définies obtenues par des méthodes diverses.*

Théorème de Cauchy. Formules de Frullani, de Fourier. Intégrale de Dirichlet $\int \frac{\sin nx}{\sin x}\varphi(x)\,dx$, lorsque n croît indéfiniment.

Ces quatre derniers Chapitres forment un recueil bien complet d'intégrales définies, dans lequel les recherches sont facilitées par une division méthodique et par la Table analytique placée à la fin de l'Ouvrage.

Chapitre X. *Intégrales eulériennes.*

Théorie développée des intégrales eulériennes de première et de seconde espèce.

Définition. Formule d'Euler. Évaluation de $\Gamma(x)$ pour x très-grand. Expression $\Gamma(n)$ sous forme de produit infini. Développement de $l\Gamma(n+1)$ en série. Calcul numérique des intégrales eulériennes. Étude de la fonction $\psi(x) = \frac{d\,l\Gamma(x)}{dx}$. Application au calcul des probabilités. Intégrales eulériennes de première espèce. Tables d'intégrales eulériennes.

Ce Chapitre contient, on le voit, un ensemble de propositions de la plus grande importance. On y retrouvera avec plaisir une très-ingénieuse démonstration de Gauss, pour calculer la fonction $\psi(x)$, lorsque x est commensurable.

Chapitre XI. *Intégrales prises entre des limites imaginaires.*

C'est à Cauchy, on le sait, que revient l'immortel honneur d'avoir créé cette théorie des intégrales à limites imaginaires, destinée à renouveler le Calcul intégral. Jusqu'à l'apparition du Mémoire sur les inté-

grales définies prises entre des limites imaginaires, on pouvait croire que le cercle d'idées ouvert par Newton et Leibnitz avait été exploré dans ses parties essentielles. Quelques théories paraissaient seules manquer au développement du Calcul intégral, et, au commencement du siècle, Lagrange, Laplace, Fourier avaient surtout étudié les applications du Calcul différentiel à la Mécanique, à l'Astronomie et à la Physique mathématique. Cauchy, par sa théorie, a ouvert une voie nouvelle dans laquelle l'ont suivi, avec le plus grand succès, les plus éminents géomètres de notre époque. MM. Puiseux, Weierstrass, Riemann, Briot et Bouquet, Clebsch et Gordan ont déjà fondé, en prenant tous pour base les travaux de Cauchy, des théories importantes dont l'étude s'impose à tous les géomètres désireux de s'instruire et de faire progresser à leur tour le Calcul intégral. Grâce aux notions dues à Cauchy et aux développements récents que nous venons de signaler, on a été conduit à une manière nouvelle de poser tous les problèmes du Calcul intégral, qui promet à notre époque de nombreuses et importantes découvertes. M. Bertrand expose, avec les développements nécessaires, la théorie de Cauchy; mais il commence par une remarque nouvelle sur un Mémoire de Poisson.

Dès 1811, on ne peut le contester, Poisson avait rencontré la difficulté relative aux imaginaires et avait fait un pas notable vers la solution. Cette remarque n'enlève rien, du reste, dans l'esprit de l'auteur, aux droits de Cauchy : « Ce passage très-remarquable, dit-il (p. 294), contient la définition précise des intégrales imaginaires qui ont joué depuis un rôle si important; mais, satisfait d'avoir écarté une difficulté singulière qui l'avait un instant étonné, Poisson n'a suivi aucune des conséquences de son ingénieuse explication, en laissant à Cauchy l'honneur de créer la théorie nouvelle. »

Les exemples choisis et développés feront bien comprendre l'utilité des idées nouvelles proposées par Cauchy; l'auteur justifie quelques démonstrations dans lesquelles les intégrales imaginaires ont été introduites sans examen suffisant; en sorte que son exposition peut être considérée comme la préparation la plus convenable à l'étude des ouvrages spéciaux où l'on glisse beaucoup trop rapidement sur les commencements de la théorie. Le Chapitre se termine par les conséquences les plus importantes : variation brusque d'une intégrale imaginaire; nombre des racines dans un contour; recherches

de M. Puiseux; aperçu sommaire des méthodes de représentation des imaginaires suivies par Riemann.

CHAPITRE XII. *Calcul numérique de la valeur approchée d'une intégrale définie.*

Méthode des trapèzes, de Cotes, de Simpson. Méthode de Gauss par les fonctions X_n. Application à un exemple. Formule d'Euler. Cette formule si importante est celle qu'on peut écrire de la manière suivante

$$\Delta u_x = h u'_x + \frac{h}{2} \Delta u'_x - \frac{B_1}{1.2} h^2 \Delta u''_x + \ldots .$$

La démonstration en est présentée avec la plus grande simplicité, grâce à des développements préliminaires que M. Bertrand avait eu la prévoyance de placer dans le premier Volume.

LIVRE II. Applications et développements.

CHAPITRE Ier. *Évaluation des aires planes et des arcs de courbe.*

Théorèmes de Steiner sur les roulettes, de M. Holditch, de Pascal, de Fagnani, de M. Chasles sur les arcs d'ellipse, et de M. Talbot.

CHAPITRE II. *Évaluation des surfaces courbes.*

Emploi des coordonnées curvilignes. Surface de l'ellipsoïde traitée par les méthodes les plus simples. Introduction des rayons de courbure dans l'expression de la surface, etc.

CHAPITRE III. *Détermination des volumes.*

CHAPITRE IV. *Calcul de l'attraction des corps solides.*

Loi générale de l'attraction. Solide de plus grande attraction. Attraction d'une sphère, d'un ellipsoïde. Potentiel. Principe des images.

CHAPITRE V. *Théorie des intégrales multiples.*

Formule de Poisson. Méthode de Dirichlet. Changement de variables. Courbure totale d'une surface fermée. Formule de Green. Théorie des surfaces de niveau par M. Chasles. Théorème de M. Crofton. Le dernier théorème est celui qui a été communiqué à l'Académie des Sciences, et qui établit une relation entre une intégrale double étendue à l'extérieur d'une courbe convexe, l'aire et le périmètre de cette courbe. Nous croyons nouvelle la démonstration

que propose M. Bertrand et qui est fondée sur le calcul des probabilités.

Chapitre VI. *Calcul inverse des intégrales définies.*

Transformation d'une série en intégrale définie. Série hypergéométrique de Gauss. Fonctions génératrices d'Abel.

Les problèmes qui font l'objet de ce Chapitre ne sont pas susceptibles d'une définition précise. On peut, d'une infinité de manières, exprimer une quantité par une intégrale définie. M. Bertrand a réuni les exemples les plus élégants. Nous avons plus particulièrement remarqué le problème général traité par Abel, à l'occasion de la tautochrone dans le vide.

Chapitre VII. *Quelques développements en série.*

Formule de Taylor. Théorème de Laurent. Fonctions bien définies. Série de Lagrange, démontrée par la méthode si simple de M. Rouché. Séries trigonométriques conformément aux principes de Dirichlet. Fonctions Y_n de Laplace. Développements en séries ordonnées suivant ces fonctions.

Chapitre VIII. *Intégrabilité des fonctions différentielles.*

Cette question, on le sait, a fait l'objet des recherches de plusieurs géomètres et de M. Bertrand en particulier. On trouvera, dans ce Chapitre, des résultats élégants obtenus par l'auteur et quelques autres géomètres, Poisson, Joachimsthal, etc.

LIVRE III. Théorie des fonctions elliptiques.

Ce Livre, le dernier du volume, contient seulement les points essentiels de la théorie. Les fonctions elliptiques ont acquis aujourd'hui une grande importance; pour les traiter complétement, il faudrait leur consacrer au moins tout un volume. Si M. Bertrand nous avait donné une étude aussi complète, nous lui en aurions été certainement très-reconnaissants, mais il faut bien avouer qu'un tel développement aurait établi une grande disproportion entre les différentes parties de l'œuvre. On sait que deux méthodes principales et tout à fait différentes peuvent être adoptées dans l'exposition de la théorie. Jacobi et M. Hermite, laissant de côté le Calcul intégral, ont commencé par la théorie développée des fonctions Θ. M. Bertrand est resté fidèle à l'ordre historique. La méthode qu'il a suivie et qu'il avait déjà développée dans son cours du Collége de France, est celle qui a son origine dans les travaux d'Abel et de Cauchy.

Chapitre Ier. *Théorèmes relatifs à l'addition des intégrales.*

Méthodes de Lagrange, de Jacobi. Théorèmes de Poncelet. Théorème d'Abel. Interprétation géométrique de M. Clebsch.

Le théorème d'Abel ne nous a pas paru développé d'une manière suffisamment complète. Espérons que, dans la prochaine édition, M. Bertrand lui consacrera une place plus honorable, ainsi qu'à la théorie des fonctions abéliennes qui a fait dans ces derniers temps des progrès si considérables.

Chapitre II. *Double périodicité des fonctions elliptiques.*

Addition des arguments. Définition précise des fonctions elliptiques. Théorèmes généraux sur les fonctions périodiques. Proposition de M. Liouville : l'auteur fera un emploi fréquent de cette importante proposition qui introduit tant de simplicité dans la théorie. Elle remplace, en effet, d'une manière avantageuse, la considération des fonctions symétriques des racines qui a été le point de départ d'Abel dans ses Mémoires sur la multiplication et la transformation.

Nous avons aussi remarqué une démonstration géométrique très-simple de l'impossibilité d'une troisième période. Cette démonstration avait été déjà donnée dans le cours de M. Bertrand, mais il est juste d'indiquer, à cause de l'importance du principe employé, que Dirichlet avait fait usage de considérations semblables dans son *Mémoire sur la réduction des formes quadratiques ternaires*, inséré au *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. IV, p. 217.

Chapitre III. *Multiplication et division de l'argument.*

D'après la méthode d'Abel, simplifiée par Jacobi. Application aux points d'inflexion des courbes du troisième ordre.

Chapitre IV. *Expressions des fonctions elliptiques sous forme de produits.*

La théorie de la multiplication indique, comme pour les fonctions circulaires, la forme de ces développements qui sont ensuite établis en toute rigueur. Influence de l'ordre des facteurs dans les produits infinis. Théorèmes de M. Cayley.

Chapitre V. *Fonctions* $\mathrm{H}(x)$, $\Theta(x)$ *de Jacobi.*

Développements en série. Intégrales de deuxième et de troisième espèce.

Chapitre VI. *Transformation des fonctions elliptiques.*

Transformations linéaires. Échelle des modules de Lagrange, de Gauss. Principe algébrique de Jacobi. Théorie d'Abel.

Chapitre VII. *Calculs numériques. Tables.*

Ce dernier Chapitre est consacré à des applications et à des calculs très-intéressants. Il se termine par quatre Tables donnant les valeurs numériques des fonctions elliptiques.

C'est avec la théorie des fonctions elliptiques que se termine ce premier Volume de Calcul intégral. L'analyse rapide que nous venons d'en faire ne peut donner qu'une idée bien imparfaite des nombreuses richesses réunies et mises en œuvre dans ce volume de plus de 700 pages, dont la lecture est pourtant si facile et si attrayante. Espérons que nos jeunes mathématiciens sauront mettre à profit les leçons d'un maître si dévoué, et lui fournir l'occasion d'ajouter de nouveaux Chapitres à son livre dans la prochaine édition. En tous cas, nous serons l'interprète de tous auprès de l'auteur en le remerciant sincèrement, et en le priant de toutes nos forces de hâter l'impression du troisième Volume dont tant de parties sont déjà préparées et communiquées aux savants par l'enseignement même de M. Bertrand.

G. D.

DURÈGE (Dr H.), ord. Professor am Polytechnicum zu Prag. — Theorie der elliptischen Functionen. *Versuch einer elementaren Darstellung.* — Zweite Auflage; 1868. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. Prix : 3 Thlr. (*).

M. Durège, à qui l'on doit le premier Ouvrage spécial qui ait paru sur la *Théorie des quantités complexes* (**), avait déjà, en 1861, publié, le premier, un traité élémentaire des fonctions elliptiques,

(*) *Théorie des Fonctions elliptiques. Essai d'une exposition élémentaire;* par le Dr H. Durège, professeur ordinaire à l'Institut Polytechnique de Prague. 2e édit. Leipzig, chez B.-G. Teubner; 1868. In-8°, xii-388 pages.

(**) *Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse, mit besonderer Berücksichtigung der Schöpfungen Riemanns bearbeitet von* Dr H. Durège, ordentl. Professor am Polytechnicum zu Prag. Leipzig, Druck und Verlag von B.-G. Teubner; 1864. In-8°, xii-228 pages.

destiné à remplacer le livre déjà vieilli de Verhulst. Le succès de ce traité, attesté par l'écoulement rapide de la première édition, est dû aux qualités de rédaction qui le distinguent et au choix heureux du plan le plus propre à faciliter aux commençants l'étude de cette branche importante du Calcul intégral.

Dans l'intervalle qui s'est écoulé entre les deux éditions, ont paru deux autres Ouvrages sur le même sujet et destinés au même but que celui de M. Durège. Le premier de ces Ouvrages est le volume publié à Berlin en 1864 par M. Schellbach, et intitulé : *Die Lehre von den elliptischen Integralen und den Theta-Functionen*. L'auteur de ce livre a choisi le mode d'exposition recommandé par Jacobi vers la fin de sa vie, en prenant pour point de départ les fonctions Θ, définies d'abord comme des produits infinis. Une fois que l'on a établi les propriétés fondamentales de ces fonctions, on en déduit, avec une grande facilité, les formules relatives aux fonctions elliptiques. Le traité de M. Schellbach se recommande par le recueil complet de formules qu'il contient et par le soin avec lequel sont exposées les méthodes de calcul numérique. Seulement on est forcé de convenir que les commencements sont présentés sous une forme synthétique assez pénible à suivre, et laissent parfois quelques inquiétudes sous le rapport de la rigueur des déductions. Un autre inconvénient, au point de vue des commençants, résulte des changements que l'auteur a cru devoir apporter aux notations classiques (*) proposées par Jacobi, ce qui peut causer quelque embarras, lorsqu'on veut entreprendre la lecture d'un autre livre que celui qu'on a étudié.

L'autre traité dont il est question fait partie du second Volume du *Compendium der höheren Analysis* de M. Schlömilch (Brunswick, 1866), et comprend 186 pages de ce volume. Il se divise en deux Chapitres, dont le premier traite des *intégrales* elliptiques, d'après la méthode de Legendre. Le second Chapitre est consacré à l'étude des *fonctions* elliptiques, en partant de la double périodicité des fonc-

(*) Il serait temps, croyons-nous, que les géomètres s'entendissent pour faire cesser la variété si grande des notations employées pour représenter les fonctions elliptiques et leurs périodes. Pourquoi n'adopterait-on pas uniformément les notations de Jacobi

$$\sin\operatorname{am} u, \quad \cos\operatorname{am} u, \quad \Delta\operatorname{am} u,$$

en les remplaçant, quand les formules seraient trop longues, par les notations abrégées de Gudermann

$$\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{cn} u, \quad \operatorname{dn} u?$$

G. D.

tions inverses de l'intégrale de première espèce, et passant de là aux fonctions Al de Weierstrass et aux fonctions Θ de Jacobi.

Malgré les avantages que peuvent présenter, à certains égards, les méthodes suivies par ces deux auteurs, M. Durège a maintenu à très-peu près le plan qu'il avait suivi dans sa première édition, et dont nous allons essayer de donner une idée, en analysant rapidement les diverses Sections du nouveau volume.

Section I. *Définition des fonctions elliptiques.*

Ces fonctions sont définies comme formées avec les lignes trigonométriques de la fonction $\varphi = \mathrm{am}\,u$, inverse de l'intégrale

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}.$$

L'auteur adopte la notation de Jacobi, en indiquant les abréviations très-commodes proposées par Gudermann. Comme exemple, il applique ces fonctions à la théorie du pendule circulaire.

Section II. *Périodicité des fonctions elliptiques.*

La double périodicité de ces fonctions est établie d'après la méthode de Jacobi, qui est la plus simple, quoique laissant à désirer du côté de la rigueur. Mais l'auteur revient sur cette question dans la dernière Section, où il emploie une méthode à l'abri de toute objection. Il continue à prendre pour exemple l'application des résultats obtenus au problème du pendule circulaire.

Section III. *Réduction des intégrales elliptiques à la forme normale.*

Cette question est traitée d'après le Mémoire de Richelot : *Ueber die Substitutionen der ersten Ordnung und die Umformung der elliptischen Integrale in die Normalform* (*Journal de Crelle,* t. XXII). Applications au pendule circulaire et à la rectification de la lemniscate.

Section IV. *Des trois espèces d'intégrales elliptiques.*

L'auteur suit la marche de Legendre. Comparaison des notations de Legendre et de Jacobi. Arcs d'ellipse et d'hyperbole.

Section V. *Sur une substitution du second ordre pour la réduction des intégrales elliptiques à la forme normale.*

Cette substitution sert à ramener à des valeurs du module et de la

limite supérieure moindres que l'unité l'intégrale

$$\int_0^{v} \frac{dv}{\sqrt{(1-v^2)(1-\lambda^2 v^2)}},$$

où λ et v sont quelconques. Application au pendule.

SECTION VI. *Le théorème d'addition.*

Intégration de l'équation différentielle elliptique par les méthodes de Sturm, d'Euler et de Lagrange. Formules fondamentales qui donnent les valeurs de sin am $(u+v)$, cos am $(u+v)$, etc., et recueil des formules les plus importantes qui s'en déduisent.

SECTION VII. *Liaison entre les fonctions elliptiques et la Trigonométrie sphérique.*

Triangle sphérique dont les côtés sont am$u$, am$v$ et am$(u \pm v)$. Déduction des formules de Gauss au moyen des propriétés des fonctions elliptiques. Démonstration du théorème d'addition par la Trigonométrie sphérique.

SECTION VIII. *Le théorème d'addition pour les intégrales de seconde et de troisième espèce.*

SECTION IX. *Le théorème d'Abel.*

Cette Section constitue l'addition la plus importante que l'auteur ait introduite dans sa seconde édition. Il reproduit la démonstration donnée par Abel dans son Mémoire intitulé : *Remarques sur quelques propriétés générales d'une certaine sorte de fonctions transcendantes* (*Journal de Crelle,* t. III, et *Œuvres d'Abel,* t. I, p. 288). Cette démonstration est restreinte au cas où les intégrales contiennent un radical carré portant sur un polynôme entier quelconque, M. Durège n'ayant pas cru qu'il fût nécessaire, dans un Ouvrage élémentaire sur les fonctions elliptiques, de parler du cas le plus général, traité par Abel dans ses derniers travaux. De ce théorème on déduit, comme cas particulier, le théorème d'addition pour les intégrales elliptiques des trois espèces. La méthode d'Abel est exposée d'ailleurs avec la plus grande clarté et les plus heureux éclaircissements.

SECTION X. *Construction géométrique du théorème d'addition, d'après Jacobi.*

Cette construction est tirée du Mémoire publié par Jacobi, dans le tome III du *Journal de Crelle,* et intitulé : *Ueber die Anwendung der*

elliptischen Transcendenten auf ein Problem der Elementargeometrie, et l'auteur indique les additions qu'y a faites Richelot (*). Elle est fondée sur la considération d'une ligne polygonale inscrite à un cercle et circonscrite à un autre, intérieur au premier. Intégration géométrique de l'équation différentielle elliptique. Condition pour que le polygone se ferme; application aux polygones de trois, de quatre, de cinq côtés.

Section XI. *Transformation de Landen.*

Démonstration géométrique au moyen de la Section précédente. Applications au calcul numérique des intégrales elliptiques.

Section XII. *Développement des fonctions elliptiques en produits infinis.*

Section XIII. *Développement des fonctions elliptiques en séries.*

Section XIV. *Développement en séries des intégrales de seconde espèce.*

Section XV. *Développement en séries des intégrales de troisième espèce.*

Dans ces trois dernières Sections, l'auteur a suivi les méthodes indiquées par Jacobi dans ses *Fundamenta.*

Section XVI. *La fonction de Jacobi.*

M. Durège désigne sous ce nom, proposé par Dirichlet, la fonction Θ, à laquelle les travaux de Jacobi ont donné une si grande importance. Il expose, d'après les *Fundamenta,* les propriétés de cette fonction, et les relations de ces propriétés avec la théorie des nombres. Démonstration du théorème, que tout nombre est la somme de quatre carrés.

Section XVII. *Expression des fonctions elliptiques au moyen de la fonction de Jacobi.*

(*) *Voir* aussi *Journal de Mathématiques de M. Liouville,* t. X, p. 435; — Jacobi : « Sur l'application des transcendantes elliptiques à ce problème connu de la Géométrie » élémentaire : Trouver la relation entre la distance des centres et les rayons de deux » cercles dont l'un est circonscrit à un polygone irrégulier, et dont l'autre est inscrit à » ce même polygone ». T. XI, p. 25; — Richelot : « Application des transcendantes ellip- » tiques aux polygones sphériques qui sont inscrits à un petit cercle de la sphère, et » circonscrits à un autre petit cercle, simultanément ».

Section XVIII. *Des transcendantes elliptiques de troisième espèce.* Étude de ces transcendantes, exprimées à l'aide de la fonction Θ. Exposé de la belle découverte de Jacobi.

Section XIX. *Mouvement du pendule sphérique.*

Section XX. *Fonctions d'une variable complexe, et valeurs multiples d'une intégrale définie.*

Cette Section contient un abrégé de la théorie des quantités complexes d'après Cauchy, Puiseux, Riemann, et se termine par l'application de cette théorie à la démonstration rigoureuse de la double périodicité, telle qu'on la trouve dans l'Ouvrage de MM. Briot et Bouquet.

J. Hoüel.

SALMON (G.), professeur au Collége de la Trinité, à Dublin. — Leçons d'algèbre supérieure. Traduit de l'anglais par M. Bazin, Ingénieur des Ponts et Chaussées, et augmenté de Notes par M. Hermite, Membre de l'Institut. — In-8°, xii-247 pages; 1868. Paris, Gauthier-Villars. Prix : 7fr,50.

Lorsque, dans la première moitié de ce siècle, on voyait se multiplier les découvertes dues aux méthodes si fécondes de la Géométrie moderne, on pouvait croire cette dernière appelée à prendre le pas sur l'ancienne méthode de Descartes toutes les fois qu'il s'agirait d'arriver à des vérités nouvelles. Guidée par la synthèse en quelque sorte intuitive, la méthode analytique devait, disait-on déjà, se borner à vérifier, à généraliser les résultats obtenus sans elle. Il lui manquait, en effet, un principe général qui pût conduire directement à des théorèmes nouveaux, analogues à ceux de la Géométrie supérieure.

Ce principe est fourni par la théorie des *invariants* et des *covariants*. On appelle ainsi les fonctions des coefficients et des variables d'une expression algébrique qui ne changent pas de valeur lorsque les variables sont soumises à une transformation linéaire. La considération de ces fonctions doit évidemment conduire à la découverte de propriétés des courbes et des surfaces qui sont indépendantes du choix des axes. En outre, on prévoit l'importance de ces théories

pour l'étude des propriétés projectives des figures, puisque la perspective repose sur une substitution linéaire.

On appelle *forme* une expression algébrique rationnelle, entière et homogène. Toute fonction des coefficients d'une forme, qui ne change pas de valeur lorsque les coefficients changent par suite d'une substitution linéaire effectuée sur les variables, est un invariant absolu de cette forme; on l'appelle *invariant relatif,* ou simplement *invariant,* si sa nouvelle valeur ne diffère de la valeur primitive que par une puissance du module de la substitution. C'est ainsi que l'expression $ac - b^2$ est un invariant de la forme quadratique binaire

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

parce que $a'c' - b'^2 = (ac - b^2)\,\Delta^2$, si nous désignons par a', b', c' les valeurs des coefficients après la transformation, et par Δ le module de la transformation.

Généralisant la définition des invariants, on appelle *covariant* une fonction comprenant à la fois les coefficients et les variables d'une forme, et dont les valeurs successives, obtenues par des substitutions linéaires, ne diffèrent que par un facteur égal à une puissance du module,

$$\varphi(a', b', \ldots, x', y', \ldots) = \Delta^{\rho}.\varphi(a, b, \ldots, x, y, \ldots).$$

Un *contrevariant* est un covariant qui, au lieu des variables x, y,... de la forme donnée, renferme d'autres variables ξ, η, ..., qui sont transformées en même temps que les premières, mais par la substitution inverse, c'est-à-dire qu'on fera

$$x = \lambda_1 x' + \mu_1 y' + \ldots, \quad y = \lambda_2 x' + \mu_2 y' + \ldots, \quad \ldots,$$

et

$$\xi' = \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta + \ldots, \quad \eta' = \mu_1 \xi + \mu_2 \eta + \ldots, \quad \ldots.$$

Une corrélation de ce genre a lieu, par exemple, entre les coordonnées trilinéaires d'un point et les coordonnées tangentielles d'une droite; elle a lieu encore entre les variables x, y,... et les caractéristiques D_x, D_y, ..., puisque

$$D_{x'} = \lambda_1 D_x + \lambda_2 D_y + \ldots, \quad D_{y'} = \mu_1 D_x + \mu_2 D_y + \ldots, \quad \ldots.$$

Les *divariants* ou covariants mixtes renferment les deux séries de variables x, y, ..., et ξ, η, ..., et ainsi de suite.

A côté des invariants et des covariants d'une forme unique, on peut encore considérer les invariants et les covariants d'un *système de formes*. C'est ainsi que le déterminant d'un système d'équations linéaires est un invariant du système. Le déterminant d'un système de formes quelconques est un covariant, auquel on donne le nom de *Jacobien*.

L'un des invariants les plus simples est le *discriminant;* on l'obtient en cherchant la résultante des dérivées partielles d'une forme, prises par rapport à chacune des variables. Le discriminant est d'ailleurs égal au carré du produit des différences de toutes les racines de la forme (c'est-à-dire de toutes les racines de l'équation qu'on obtient en égalant cette forme à zéro). Il s'ensuit que la réduction à zéro du discriminant d'une équation exprime la condition nécessaire pour que cette équation ait des racines égales. Si l'équation représente une courbe ou une surface, la réduction à zéro du discriminant exprime la condition nécessaire pour que la courbe ou la surface ait un point double. Le discriminant de la forme $ax^2 + 2bxy + cy^2$ est $ac - b^2$; c'est le seul invariant que possède la forme quadratique binaire.

Les deux équations

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0,$$
$$a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 = 0,$$

représentent deux couples de points sur une ligne droite, ou bien deux couples de droites passant par un même point; elles ont en commun l'invariant

$$ac' + a'c - 2bb',$$

dont la réduction à zéro exprime la condition qui doit être remplie pour que les quatre points ou les quatre droites soient en relation harmonique. Les covariants auxquels on donne le nom d'*émanants* représentent en Géométrie les courbes ou surfaces polaires d'un point par rapport à une courbe ou surface donnée.

Ces quelques exemples suffiront pour faire comprendre l'importance géométrique de la théorie des invariants et des covariants, mais elle n'est pas moins féconde en résultats qui intéressent l'Algèbre ordinaire et la Théorie des nombres. La Statique et la science du mouvement, ainsi que la Physique mathématique, y trouveront elles-mêmes un moyen de simplifier l'énoncé de leurs résultats.

La théorie en question forme déjà une nouvelle branche de l'Al-

gèbre supérieure, que l'on appelle quelquefois l'*Algèbre des transformations linéaires*. On peut en faire remonter l'origine aux travaux de Gauss sur les formes quadratiques; peut-être même faut-il en voir le premier germe dans la découverte des déterminants par Leibniz (1693), renouvelée par Cramer vers 1750; mais ce n'est que depuis vingt ans que la nouvelle branche d'Algèbre s'est constituée en corps de doctrine, grâce aux travaux de Cayley, Sylvester, Hermite, Aronhold, Clebsch, Brioschi, et de quelques autres géomètres. Ce qui en rend l'accès un peu difficile au premier abord, c'est l'introduction d'une foule de termes nouveaux, choisis avec plus ou moins de bonheur; mais cette terminologie est d'un grand secours pour abréger le langage, et les inconvénients qu'elle offre seraient bien moins sensibles, si l'on pouvait s'accorder sur les dénominations à employer, de manière à en restreindre un peu le nombre.

La nouvelle Algèbre fait l'emploi le plus large des méthodes symboliques. On s'habitue ici à manier les symboles d'opérations comme des quantités, à les soumettre aux procédés de calcul ordinaires; cela abrége le raisonnement, à peu près comme les lettres de change, substituées au numéraire, abrégent les opérations commerciales. Ainsi nous pouvons, dans un contrevariant, remplacer les variables ξ, η,... par les symboles D_x, D_y,..., et nous obtiendrons un symbole d'opération qui ne varie pas lorsque les variables x, y,... sont transformées par une substitution linéaire; en l'appliquant à la forme primitive ou à l'un de ses covariants, nous aurons un nouveau covariant, ou même un invariant, si les variables disparaissent par la différentiation. De même nous pouvons, dans un covariant, remplacer x, y,... par D_ξ, D_η,..., pour opérer sur un contrevariant, etc.

La méthode très-simple que M. Cayley a donnée pour la formation des invariants et des covariants repose sur les mêmes principes. Étant données plusieurs formes U, V, W,..., nous pouvons donner aux variables x, y,..., dans U l'indice 1, dans V l'indice 2, etc. Or, d'après la règle de la multiplication des déterminants, le symbole

$$\overline{123}\ldots = (D_{x_1}, D_{y_2}, D_{z_3}, \ldots)$$

n'est pas altéré par une transformation linéaire des variables (en faisant toujours abstraction du facteur numérique Δ^p), puisque les caractéristiques D_x, D_y,... se transforment par la substitution inverse.

Il s'ensuit que le résultat de l'opération

$$\overline{123}^{\alpha}.\overline{134}^{\beta}\ldots \mathrm{UVW}\ldots$$

sera un invariant, si les variables ont disparu, ou bien un covariant, s'il en reste et si l'on supprime les indices. Ainsi, en faisant

$$\mathrm{U} = ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad \mathrm{V} = a'x^2 + 2b'xy + c'y^2,$$

on aura, en supprimant le facteur numérique 4,

$$\overline{12}^{2}\,\mathrm{UV} = ac' + a'c - 2bb'.$$

Rien n'empêche d'ailleurs de prendre pour U, V, W,... la même fonction; ainsi

$$\overline{12}^{2}\,\mathrm{UU} = ac - b^2.$$

MM. Aronhold et Clebsch ont modifié ce procédé comme il suit. En mettant x_1, x_2, x_3, pour x, y, z, la forme ternaire de degré n peut s'écrire

$$(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^n,$$

où il faut, après développement, remplacer le produit $a_i\, a_k\, a_l$ par le coefficient a_{ikl}. Si l'on fait encore $b_i\, b_k\, b_l = c_i\, c_k\, c_l = \ldots = a_{ikl}$, on aura, par exemple, un invariant de la forme cubique ternaire ($n = 3$) en développant le produit des déterminants

$$(a_1b_2c_3)(b_1c_2d_3)(c_1d_2a_3)(d_1a_2b_3) = \overline{123}.\overline{234}.\overline{341}.\overline{412}.$$

Nous n'insistons pas plus longuement sur le détail de ces méthodes ingénieuses et fécondes; ceux qu'elles intéressent les trouveront exposées d'une manière très-lucide dans l'Ouvrage du Rév. George Salmon, dont M. Bazin vient de nous donner la traduction. M. Salmon, professeur au Collége de la Trinité à Dublin, a publié en outre une *Géométrie analytique des sections coniques* et une *Géométrie à trois dimensions*, où les nouvelles méthodes sont appliquées d'une manière magistrale; ses Ouvrages sont devenus classiques en Angleterre, et les excellentes traductions de M. Fiedler les ont popularisés en Allemagne. M. Bazin a certainement rendu service à la science en faisant connaître en France un abrégé substantiel des *Lessons introductory to the modern higher Algebra*, complété par quelques applications empruntées aux traités de Géométrie du même auteur. M. Hermite a bien voulu enrichir le livre de plusieurs Notes extraites de ses Recher-

ches sur l'équation du cinquième degré. On peut donc espérer que les *Leçons d'Algèbre supérieure* trouveront en France l'accueil que cet Ouvrage mérite à un si haut degré.

R. RADAU.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK. — Herausgegeben unter der verantwortlichen Redaction von Dr O. SCHLÖMILCH, Dr E. KAHL, und Dr M. CANTOR. T. XIV; 1869 (*).

LOMMEL (E.). — *Exposition élémentaire des phénomènes de diffraction de Fraunhofer.* (47 p., 1 pl.)

THOMAE (J.). — *Note sur la théorie de la fonction*

$$P\begin{pmatrix}\alpha, \beta, \gamma \\ \alpha', \beta', \gamma'\end{pmatrix}, x\Big).$$

(14 p.)

Étude d'une intégrale déjà considérée par Riemann

$$x^\alpha(1-x)^\gamma \int s^{-\alpha'-\beta-\gamma'}(1-s)^{-\alpha'-\beta'-\gamma}(1-xs)^{-\alpha-\beta-\gamma}ds,$$

et prise entre les limites $0, 1, \frac{1}{x}, \infty$.

WIENER (CHR.). — *Calcul des altérations dans un réseau variable de triangles.* (3 p.)

BECKER (J.-C.). — *Sur les polyèdres.* (2 art., 18 p.)

Étude des surfaces polyédriques au point de vue de leur connexion simple ou multiple.

SCHLÖMILCH (O.). — *Sur la valeur de* arc tg $(\xi + i\eta)$. (3 p.)

(*) *Journal de Mathématiques et de Physique,* publié sous la rédaction responsable de MM. O. SCHLÖMILCH, E. KAHL et M. CANTOR. Leipzig, chez B.-G. Teubner. Fondé en 1856 par O. SCHLÖMILCH et B. WITZSCHEL. Publié par livraisons bimensuelles, formant chaque année un volume grand in-8° (en langue allemande). Chaque livraison est accompagnée d'un Bulletin bibliographique (*Literaturzeitung*) donnant deux fois par an la liste *par ordre de matières* des Mémoires publiés dans les principaux recueils scientifiques.

Horvath. — *Sur la valeur approchée de* $\sqrt{u^2+v^2+w^2}$. (Extrait du journal *l'Institut,* année 1868, n° 1782.)

Wittwer (C.). — *Essai d'une théorie des gaz.* (16 p.)

Staudigl (R.). — *Étude de quelques formes de voûte, au moyen desquelles on peut couvrir un espace de base trapézoïdale.* (24 p, 1 pl.)

Cantor (G.). — *Sur les systèmes simples de numération.* (8 p.)

Baur (C.-V.). — *Résolution d'un système d'équations dont l'une est quadratique et les autres linéaires.* (2 art., 22 p.)

Loschmidt (J.). — *Le potentiel des masses électriques en mouvement, déduit du potentiel relatif à l'état de repos.* (7 p.)

Enneper (A.). — *Sur un problème de Géométrie sphérique.*

Trouver la relation entre les éléments de deux ellipses, dont l'une est inscrite et l'autre circonscrite à un polygone donné.

Cantor (G.). — *Deux théorèmes sur une certaine décomposition des nombres en produits infinis.* (9 p.)

Schlömilch (O.). — *Sur quelques courbes dérivées des sections coniques.* (6 p.)

Lieu du pôle d'une droite de longueur constante inscrite dans une conique.

Hankel (H.). — *La découverte de la gravitation et Pascal.* (9 p.)

Helmert (F.-R.). — *Sur la théorie des réseaux trigonométriques.* (35 p.)

Olivier (A.). — *Sur la génération des courbes géométriques déterminées par les points d'intersection inconnus de courbes données.* (41 p.)

Schlömilch (O.). — *Sur la série harmonique.* (4 p.)

Lejeune-Dirichlet a montré, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin* pour 1837, qu'il n'est pas permis de changer l'ordre des termes dans une série infinie. Par exemple, les deux séries

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\cdots$$

et

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots,$$

quoiqu'elles contiennent les mêmes termes, ont une somme tout à fait différente : la première $l.2$, la seconde $\frac{3}{2}\,l.2$. Ce résultat est susceptible d'une double généralisation, en ce sens qu'on peut d'abord prendre, au lieu de la série considérée par Dirichlet, la suivante

$$S = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} - \ldots,$$

et en second lieu en ce que, au lieu de prendre deux termes positifs suivis d'un terme négatif, on peut faire suivre p termes positifs et q termes négatifs, et l'on forme une nouvelle série T, qui ne diffère de S que par l'ordre des termes. Cela posé, on a

$$T = S + \frac{1}{2}\,l.\frac{p}{q}.$$

Toeplitz (J.). — *Des relations qui existent entre les coordonnées trilinéaires et tétraédriques.* (7 p.)

Grube (F.). — *Historique du théorème de Maclaurin, concernant l'attraction des ellipsoïdes confocaux.* (6 p.)

Grube (F.). — *Attraction d'un segment limité par une surface du second degré et par deux plans perpendiculaires à son axe.* (23 p.)

Kötteritzsch (Th.). — *Distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs.* (2e art., 20 p.)

Burmester (L.). — *Sur les isophotes (lignes d'égale intensité lumineuse).* (2e part., 21 p., 1 pl.)

Schell (A.). — *Sur l'exactitude de l'équation des angles de l'instrument à niveler de Stampfer.* (8 p.)

Becker (J.-C.). — *Note additionnelle à l'article sur les polyèdres.* (*Voir* plus haut.)

Loschmidt (J.). — *Mouvement de l'électricité dans un courant galvanique.* (3 p.)

Thomae (J.). — *La formule récurrente*

$$(B + A n)\varphi(n) + (B' - A'n)\varphi(n+1) + (B'' + A''n)\varphi(n+2) = 0.$$

(19 p.)

Durège (H.). — *Sur une construction facile des courbes du troisième ordre qui passent par les points à l'infini sur le cercle.* (4 p.)

Grelle (Fr.). — *Tétraèdre de volume maximum inscrit dans un ellipsoïde à trois axes inégaux.* (4 p.)

Weyr (E.). — *Sur l'identité des caustiques avec les courbes podaires.* (6 p.)

Hoppe (R.). — *De la courbe tautochrone dans le cas du frottement.* (6 p.)

Grelle (Fr.). — *Sur un caractère géométrique propre à faire reconnaître l'espèce de la conique déterminée par cinq tangentes données ou cinq points donnés.*

Enneper (A.). — *Les surfaces cycliques.* (29 p.)

Surfaces engendrées par le mouvement d'un cercle variable.

Most (R.). — *Sur trois intégrations à l'intérieur de la figure*

$$\left(\frac{x}{a}\right)^p + \left(\frac{y}{b}\right)^q + \left(\frac{z}{c}\right)^r + \cdots = 1.$$

(4 p.)

Baur (C.-W.). — *Résolution d'un système d'équations dont l'une est quadratique et les autres linéaires.* (10 p.)

Hankel (H.). — *Démonstration d'un lemme dans la théorie des intégrales définies* (2 p.)

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(a)\int_a^b \varphi(x)dx + [f(b)-f(a)]\int_\mu^b \varphi(x)dx,$$

$$\mu = \text{moy.}\,(a,\,b).$$

Krumme (W.). — *Problèmes sur le plan incliné.* (3 p.)

Kurz (A.). — *Sur la démonstration de la propagation de l'état vibratoire.* (3 p.)

Weyr (E.). — *Étude analytique de la corrélation quadratique.* (83 p.)

Le mode de correspondance dont il est question dans cet article est celui qui a d'abord été proposé par Magnus (*), et dans lequel à un point d'une figure, correspond en général un point de l'autre, et à une droite une conique.

(*) *Journal de Crelle*, t. VIII, p. 51.

WITTWER (W.-C.). — *Application de la théorie du choc des corps élastiques à quelques phénomènes calorifiques.* (28 p.)

SCHUBERT (H.). — *Propriété géométrique des seize sphères tangentes à quatre sphères données quelconques. Relations métriques entre les rayons des seize sphères.* (11 p.)

WEYR (E.). — *Construction du centre de courbure des courbes podaires.* (5 p.)

GRÜNWALD (A.-K.). — *Sur la théorie du potentiel.* (4 p.)

MATTHIESSEN (L.). — *Grandeur apparente et absolue du Soleil.* (7 p.)

JOCHMANN (E.). — *Sur la représentation conforme du rectangle sur la surface du cercle.*

Les problèmes de la nature de celui que traite M. Jochmann ont été d'abord proposés par Riemann. On peut les énoncer d'une manière générale comme il suit : Faire correspondre les points d'une portion du plan limitée par une courbe A à ceux d'une autre portion donnée limitée par une courbe B, de manière que les parties infiniment petites correspondantes soient semblables. On peut encore, au lieu de deux portions de plan, considérer deux portions de surface limitées par des courbes déterminées. Nous aurons l'occasion de revenir sur ces problèmes à propos des recherches de Riemann.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, publiés par MM. les Secrétaires perpétuels (*). T. LXX; 1870.

N° 7. Séance du 14 février 1870.

M. BERTRAND fait hommage à l'Académie du second Volume de son *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral.*

M. DE SAINT-VENANT. — *Sur une détermination rationnelle, par approximation, de la poussée qu'exercent des terres dépourvues de cohésion, contre un mur ayant une inclinaison quelconque.*

(*) Voir *Bulletin*, p. 29.

M. Morin. — *Rapport sur le Mémoire présenté à l'Académie le* 29 *mai* 1869, *par* M. Tresca, *sur le poinçonnage et sur la théorie mécanique de la déformation des corps solides.*

M. de Saint-Venant. — *Preuve théorique de l'égalité des deux coefficients de résistance au cisaillement et à l'extension ou à la compression dans le mouvement continu de déformation des solides ductiles au delà des limites de leur élasticité.*

M. de Saint-Venant. — *Rapport sur cinq Mémoires de* M. Félix Lucas, *intitulés :* Recherches concernant la Mécanique des atomes, *présentés les* 20 *juillet,* 5 *octobre,* 16 *et* 23 *novembre, et* 1er *décembre* 1868.

M. Jordan. — *Sur une nouvelle combinaison des vingt-sept droites d'une surface du troisième ordre.*

M. Pellet. — *Sur les fonctions irréductibles suivant un module premier et une fonction modulaire.*

M. Ribaucour. — *Note sur la déformation des surfaces.*

M. Mannheim a montré que lorsqu'un corps invariable de forme est assujetti à quatre conditions, ses points décrivent des surfaces, et qu'à un instant déterminé, les normales à ces surfaces s'appuient toutes sur deux droites. Cela posé, dans le cas où ces deux droites se rencontrent toujours, les lieux de leurs points de rencontre dans l'espace et dans le corps sont deux surfaces applicables l'une sur l'autre.

C'est là un des principaux théorèmes énoncés dans la Note de M. Ribaucour. On voit que cette proposition est l'analogue de la suivante : Quand une figure se déplace dans un plan, le lieu des centres instantanés de rotation dans la figure forme une courbe qui roule sur la courbe lieu des centres instantanés sur le plan fixe.

N° 8. **Séance du 21 février 1870.**

M. de Saint-Venant. — *Rapport sur un Mémoire de* M. Boussinesq, *présenté le* 19 *avril* 1869, *avec additions du* 19 *novembre, et relatif à la théorie des ondes liquides périodiques.*

M. de Saint-Venant. — *Rapport sur un complément, présenté par* M. Tresca, *le* 7 *février* 1870, *à son Mémoire du* 27 *novembre* 1864,

relatif à l'écoulement des corps solides malléables poussés hors d'un vase cylindrique par un orifice circulaire.

M. Halphen. — *Mémoire sur les courbes gauches algébriques.*

L'auteur donne, dans l'extrait inséré, des théorèmes généraux sur la théorie difficile et importante des courbes gauches algébriques. L'une des conséquences les plus simples peut s'énoncer ainsi :

Les surfaces de degré minimum qui passent par une ligne algébrique quelconque tracée sur une surface du second ordre coupent en outre cette dernière, *seulement* suivant des droites d'un même système.

M. Newcomb. — *Aperçu d'une méthode directe et facile pour effectuer le développement de la fonction perturbatrice et de ses coefficients différentiels.*

M. Martin (Ad.). — *Sur la méthode suivie par* L. Foucault, *pour reconnaître si la surface d'un miroir est rigoureusement parabolique.*

N° 9. Séance du 28 février 1870.

M. Lambert (Gustave). — *Détermination expérimentale de la forme de la Terre.*

M. Lambert soumet au jugement de l'Académie différents procédés simples de mesure, qu'il se propose d'employer dans son expédition prochaine au pôle Nord.

M. Lucas (F.). — *Note relative à l'état physique des corps.*

M. Montucci. — *Sur la méthode de Gauss pour l'abaissement des équations trinômes.*

M. Montucci fait observer qu'à l'époque où il a publié une méthode pour l'abaissement des équations trinômes, il ignorait que Gauss eût traité le même sujet (*). « Cet illustre mathématicien arrive, dit-il, par un artifice algébrique, aux résultats que j'obtiens par une voie rigoureusement géométrique (**) ».

M. Martin (Ad.). — *Méthode d'autocollimation de* L. Foucault; *son application à l'étude des miroirs paraboliques.*

(*) *Œuvres* de Gauss, t. III, p. 87.

(**) Voir *Comptes rendus*, t. LXIX, p. 525 et 757.

N° 10. Séance du 7 mars 1870.

M. de Saint-Venant. — *Sur l'établissement des équations des mouvements intérieurs opérés dans les corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état.*

M. Brioschi. — *Sur la bissection des fonctions hyperelliptiques.*

L'éminent géomètre italien établit un théorème important, relatif aux fonctions abéliennes à radicaux carrés. Si le polynôme sous le radical est de degré $2p+1$, on n'a pour effectuer la bissection qu'à résoudre une équation de degré p. « Ce résultat, dit-il, vient confirmer et préciser le caractère exceptionnel des équations de la bissection que M. Jordan a mis en évidence au n° 491 de son excellent *Traité des substitutions et des équations algébriques.* »

M. Bourget. — *Sur le développement algébrique de la fonction perturbatrice.*

Nous ne parlerons pas encore de cette importante Note, l'auteur se proposant de présenter ses recherches développées à l'Académie.

M. Lucas (F.). — *Calcul des paramètres physiques et des axes principaux en un point quelconque d'un système atomique.*

MÉLANGES.

NOTICE SUR LA VIE ET LES TRAVAUX DE N.-I. LOBATCHEFSKY.

Les importants travaux auxquels ont donné lieu les découvertes de Lobatchefsky dans ces dernières années, les débats auxquels son nom s'est trouvé mêlé ont attaché à la biographie de ce géomètre un intérêt réel, et M. le prince Boncompagni a rendu un vrai service à l'histoire scientifique en insérant dans son *Bulletin* (*) une traduction d'un éloge de Lobatchefsky, par M. le professeur Ianichefsky, de l'Université de Kazan.

Ce discours, en nous retraçant la vie du savant dont les travaux tendent à prendre une place importante dans la science, nous montre

(*) Notice historique sur la vie et les travaux de N.-I. Lobatchefsky. Discours prononcé dans la séance solennelle de l'Université impériale de Kazan, le $\frac{5}{17}$ novembre 1868, par E. Ianichefsky. Traduit du russe par A. Potocki. (*Bullettino di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche*, t. II; mai 1869.)

aussi, dans le même homme, l'administrateur éminent et infatigable dont le dévouement, secondé par la libéralité habituelle du Gouvernement russe pour tout ce qui touche au progrès scientifique, a fait monter, en peu d'années, l'Université de Kazan au rang si élevé qu'elle occupe maintenant dans le haut enseignement européen. Nous regrettons que les limites imposées à cet article ne nous permettent pas d'insister sur l'histoire, si instructive, de la création de ce grand Établissement, et d'étudier les causes auxquelles il doit sa prospérité. Si nous pouvions montrer, par le détail des faits, comment, pour arriver à de si prodigieux résultats, pour implanter en si peu de temps les hautes études à l'extrême frontière de l'Europe civilisée, il a suffi de laisser se développer librement l'admirable organisation universitaire empruntée à l'Allemagne, en lui accordant généreusement les subventions nécessaires, peut-être fermerions-nous la bouche à ceux qui osent prétendre que notre pays est incapable de pareils résultats, et que, seul entre tous, il doit concentrer sur un seul point toute son activité intellectuelle. Nous nous contenterons, pour le moment, d'extraire du travail de M. Ianichefsky ce qui touche particulièrement à la biographie du géomètre, nous réservant de revenir, dans d'autres articles, sur ses travaux, dont une partie seulement est connue dans l'Europe occidentale, et dont l'importance historique est accrue par les vues nouvelles qu'ils renferment et qui intéressent encore les progrès de la science.

Nicolas-Ivanovitch Lobatchefsky naquit en 1793, dans le district de Makarief, dépendant du Gouvernement de Nijni-Novgorod. Son père appartenait à la classe des petits fonctionnaires, et ses minces émoluments lui suffisaient à grand'peine pour soutenir sa famille, composée de sa femme Praskovia Ivanovna, et de ses trois fils Alexandre, Nicolas et Alexis (*). Il mourut vers l'année 1800, laissant sa famille dans la misère. Sa veuve vint s'établir à Kazan avec ses enfants, qui entrèrent successivement comme boursiers au Gymnase de cette ville. Nicolas y fut inscrit le $\frac{5}{17}$ novembre 1802. Il y fit de bonnes études, et cultiva principalement le latin et les mathématiques.

L'Université de Kazan ayant été fondée en 1805, il y fut admis,

(*) L'aîné, Alexandre, se noya en 1807 dans la Kazanka. Le plus jeune, Alexis, habite actuellement Kazan, comme professeur retraité.

deux ans plus tard, comme élève de l'État. Vers cette époque, grâce aux soins du curateur Roumofsky, le personnel de l'Université se fortifia par l'arrivée de plusieurs professeurs allemands, parmi lesquels nous remarquons les noms de Bartels, l'ami d'enfance de Gauss; de J. Littrow, le futur directeur de l'Observatoire de Vienne, et du professeur de physique Bronner. Ces trois hommes éminents reconnurent bientôt l'aptitude extraordinaire du jeune Lobatchefsky; ils le prirent en affection, et lui consacrèrent leur attention particulière. Ce fut par leur intervention qu'il obtint, en 1811, ses grades de candidat et de magister, qu'il avait mérités par ses fortes études, mais que l'Administration universitaire voulait lui refuser pour le punir de quelques infractions à la discipline.

Il fit ses débuts dans l'enseignement en 1812, et fut chargé du cours d'Arithmétique et de Géométrie pour les aspirants fonctionnaires, d'abord comme suppléant de son frère Alexis, et bientôt après comme titulaire. En 1814, on le nomma professeur adjoint, en ajoutant à ses fonctions celles de suppléant de Simonof, qui venait d'être attaché, comme astronome, à un voyage de circumnavigation. Promu, en 1816, au titre de professeur extraordinaire, il continua à s'occuper de ces divers enseignements, en faisant en outre un cours supplémentaire de Physique.

Depuis l'année 1819 jusqu'à la fin du règne de l'empereur Alexandre I[er], l'Université de Kazan eut à traverser une crise désastreuse, et l'enseignement fut entravé et mutilé par l'esprit tracassier et le fanatisme étroit du curateur Magnitsky. Pendant ce temps, Lobatchefsky, déjà absorbé par la multiplicité des leçons de diverse nature dont une mesquine économie surchargeait alors les professeurs, réduits à un nombre insuffisant, dut encore fournir les innombrables Rapports de toute espèce qu'exigeait une Administration inquisitoriale sur les étudiants, ainsi que sur les Écoles et les Gymnases du district.

En 1820, trois ans avant sa promotion au titre de professeur ordinaire, il commença à prendre part à la direction de l'Université, en succédant à Bartels comme doyen de la Faculté physico-mathématique, et, sauf une seule année d'interruption, il ne cessa d'occuper ce poste qu'au moment où il fut élevé à des fonctions supérieures.

Outre son enseignement et la direction du personnel, Lobatchefsky eut à s'occuper de la bibliothèque et des collections de l'Université,

laissées jusque-là dans un désordre incroyable. Longtemps ses efforts de réorganisation rencontrèrent des obstacles insurmontables, et il n'obtint de résultats sérieux qu'après la chute du système de Magnitsky.

Enfin, en 1827, après l'avénement de l'empereur Nicolas, Magnitsky tomba en disgrâce, et le gouvernement confia à Moucine-Pouchkine les fonctions de curateur de l'Université de Kazan, pour laquelle s'ouvrit dès lors une ère de prospérité. Le nouveau curateur, ayant reconnu dans Lobatchefsky l'homme le plus capable de le seconder, usa de son influence pour le faire élire recteur. Quelques années après, l'Université était régénérée; le personnel enseignant était complété et mieux choisi; la direction de l'enseignement avait recouvré la liberté nécessaire au développement de l'esprit scientifique; les bâtiments de l'Université étaient reconstruits à neuf; l'Observatoire était fondé et muni des meilleurs instruments; la bibliothèque, mise en ordre, s'enrichissait de toutes les publications littéraires et scientifiques de l'Europe; un atelier de construction pour les instruments de Physique était installé dans l'Université; les immenses trésors minéralogiques de la Russie s'étalaient dans les collections, les plus belles peut-être du continent.

Lobatchefsky ne reculait devant aucune fatigue pour l'exécution de ces travaux, dont il avait tant de droits d'être fier. Afin de pouvoir mieux diriger la construction des édifices universitaires, il apprit l'architecture, et ses connaissances dans cet art le mirent à même de rendre d'importants services, en revisant les plans et en diminuant les dépenses, qui, chose bien rare, restèrent notablement au-dessous des devis primitifs. Il travaillait de ses propres mains à l'arrangement des livres et des collections. Un voyageur qui visita Kazan en 1843 nous a raconté qu'il trouva Lobatchefsky livré à ces occupations manuelles dans un costume peu solennel, et qu'il parcourut avec lui les cabinets et les ateliers, sans se douter pendant tout ce temps que son obligeant cicerone fût le *Conseiller d'État actuel,* recteur de l'Université. Ébloui de toutes les merveilles qui venaient de passer sous ses yeux, il eut même, en sortant, la velléité de témoigner pécuniairement sa reconnaissance. Les regards indignés de son interlocuteur lui firent bien vite comprendre son erreur. Le soir, tout était oublié, lorsqu'ils se retrouvèrent à la table hospitalière du Gouverneur.

Le courage de Lobatchefsky et son dévouement pour le personnel confié à sa direction se montrèrent avec éclat pendant la terrible invasion du choléra qui vint décimer la ville de Kazan à la fin de l'année 1830. Lobatchefsky recueillit plusieurs des professeurs, avec leurs familles, et une partie des étudiants, dans les bâtiments de l'Université, dont il fit fermer rigoureusement les portes, et qui, pendant toute la durée de l'épidémie, resta séquestrée du reste de la ville, sans autre communication avec le dehors que celles qui étaient nécessaires aux approvisionnements. Grâce aux précautions hygiéniques qu'il prescrivit et à la salutaire influence qu'il exerça sur le moral de ceux qui l'entouraient, la colonie des réfugiés, composée de cinq cent soixante personnes, n'eut à déplorer que seize victimes du fléau, chiffre insignifiant en comparaison de l'effrayante mortalité qui régnait dans le reste de la ville.

En 1842, lors du violent incendie qui dévora la moitié de la ville de Kazan, Lobatchefsky eut la douleur de voir ses plus belles constructions, son observatoire, à peine terminé, devenir la proie des flammes. Sa courageuse activité ne se démentit pas dans cette circonstance, et il parvint à sauver ses précieux instruments et la bibliothèque. Deux ans après, les bâtiments étaient rétablis et toute trace du désastre avait disparu.

Ainsi vécut Lobatchefsky pendant près de vingt ans, au milieu des soins multiples du professorat et de l'administration, absorbé tout entier par des travaux auxquels on eût eu peine à croire que l'existence d'un seul homme pût suffire. Sauf quelques courtes excursions pour visiter les autres Universités de l'Empire, il ne s'absenta guère de Kazan, et l'histoire de sa vie se confond avec celle de sa chère Université.

C'est à cette même époque qu'il se livra aux recherches mathématiques qui, depuis, ont illustré son nom, mais qu'il n'eut pas la satisfaction de voir apprécier par la plupart de ses contemporains. Cependant le suffrage de Gauss put le dédommager de l'indifférence générale, et lui valut l'honneur d'être élu, en 1842, correspondant de la Société Royale de Gœttingue. Il faut ajouter que ses ouvrages les plus considérables et les plus clairement développés ont été rédigés en langue russe, et que ceux qu'il a fait paraître en français et en allemand ne contiennent peut-être pas tous les détails nécessaires pour des lecteurs non préparés.

Vers le milieu de l'année 1846, pour des raisons qui nous sont inconnues, Lobatchefsky fut mis à la retraite et enlevé, malgré le vœu unanime de ses collègues, à ses doubles fonctions de professeur et de recteur, bien que son âge et sa santé semblassent lui permettre de rendre encore d'utiles services. On le chargea de remplir, comme vice-curateur, l'intérim de la place laissée vacante par le départ du curateur Moucine-Pouchkine, appelé au même poste près de l'Université de Saint-Pétersbourg. Cette disgrâce déguisée lui fut extrêmement pénible. Au regret de quitter sa chaire de mathématiques se joignit celui de voir changer le caractère de ses relations avec ses collaborateurs, et affaiblir l'autorité morale qu'il avait puisée jusque-là dans leur libre choix. Ses rapports, autrefois si bienveillants avec le Conseil de l'Université, devinrent plus difficiles, lorsque ses anciens collègues purent voir en lui un chef imposé par l'Administration. A l'arrivée du nouveau curateur, en 1847, Lobatchefsky abandonna définitivement ses fonctions, et ne reparut plus à l'Université que pour prendre part quelquefois aux examens.

Au chagrin que lui causa son changement de position vint s'ajouter la perte d'un fils aimé, et ce nouveau malheur porta un coup fatal à sa santé physique et morale, déjà ébranlée. Pendant quelques années encore, il se survécut à lui-même, et ses amis virent avec tristesse s'obscurcir cette noble intelligence. Un seul sentiment l'animait encore, son affection pour son Université. Lorsque celle-ci, en 1855, célébra le cinquantième anniversaire de sa fondation, Lobatchefsky recueillit le reste de ses forces pour lui apporter son dernier tribut, sa *Pangéométrie*, résumé de ses belles découvertes et digne couronnement d'une vie si bien remplie. Il acheva de mourir, quelques mois après, le $\frac{12}{24}$ février 1856, à l'âge de soixante-deux ans.

J. Hoüel.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Besant (W.-H.). — Notes on Roulettes and Glissettes. Cambridge; Deighton, Bell and C°. 4 fr. 75.

Bremiker (C.). — Nautisches Jahrbuch oder vollständige Ephemeriden und Tafeln für d. J. 1872. Gr. in-8. Berlin, G. Reimer. $\frac{1}{2}$ Thlr.

Brewster (Sir David). — The Martyrs of Science; or the Lives of

Galileo, Tycho-Brahe, and Kepler. 7th edit., post-8, 230 p., cloth London, Hotten. 4 sh. 6 d.

Calza (G.). — Saggio di filosofia delle matematiche, con una appendice sulla quantità fisica. In-8, 275 p. Torino, tip. S. Giuseppe.

Darget (L.). — Du cercle, et, sans ambages, la quadrature du cercle, sa théorie. In-f°, 1 p. Auch, imp. Foix.

Donati (G.-B.). — Parole pronunziate il di 26 settembre 1869, in occasione che gli astronomi di varie parti d'Europa, riuniti in Firenze per conferire intorno alla misura di un grado europeo, visitarono i lavori incominciati per la costruzione di un nuovo osservatorio sulla collina di Arcetri (con a fronte la versione francese). In-8, 8 p. Firenze, Le Monnier.

Doergens (R.). — Theorie und Praxis der geographischen Kartennetze, 1 Thlr. — Die perspektivischen Projektionen. Lex-8. Berlin, Schropp. $\frac{3}{4}$ Thlr.

Gherardi (S.). — Soluzione e dimostrazione di alcuni problemi e teoremi sulle serie doppie; 2a ediz. rivista e seguita da un' appendice del Dott. *D. Cipolletti*. In-4, 26 p. Roma, tip. delle Scienze mat. e fisiche.

Goldberg (B.-M.). — Rest- und Quotient-Rechnung nach eigenen Forschungen zum Vortrage in den höheren Klassen der Lehranstalten systematisch dargestellt. Hoch-4. Hamburg, Hoffmann und Campe. 2 Thlr.

Herschel (Sir John-F.-W.). — Outlines of Astronomy. 10th edit. In-8, 778 p., cloth. London, Longmans. 18 sh.

Imschenetsky. — Mémoire sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, traduit du russe par J. Hoüel. In-8°, 198 p. Paris, Gauthier-Villars. 5 fr.

Jahrbuch (*Berliner Astronomisches*) für 1872, mit Ephemeriden der Planeten 1-108 für 1870. Herausgegeben von W. Foerster unter Mitwirkung von Powalky und Becker. Gr. in-8. Berlin, Dümmler's Verlagsbuchhandlung. 2 Thlr.

Lespiault. — Théorie géométrique des tautochrones dans les cas où la force est fonction de l'arc à parcourir. In-8, 6 p. Paris, Gauthiers-Villars. 60 c.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

PLUECKER (J.). — NEUE GEOMETRIE DES RAUMES, GEGRÜNDET AUF DIE BETRACHTUNG DER GERADEN LINIE ALS RAUMELEMENT. I Abth., 1868. II Abth. (herausg. von F. KLEIN), 1869. — Leipzig, Teubner. Prix : 5 thlr.

Dans les derniers temps de sa vie, Plücker avait repris ses recherches de Géométrie abandonnées depuis près de trente ans. Un Mémoire inséré aux *Transactions philosophiques* pour 1865, et qui a été traduit en français (*), pose les fondements d'une doctrine nouvelle dont le développement promet de conduire à d'importantes découvertes. L'impression d'un Ouvrage qui devait résumer ses travaux relatifs à la « Nouvelle Géométrie de l'espace » était commencée sous les yeux de l'auteur, quand la mort vint le surprendre, comme Archimède, au milieu de ses calculs. L'éditeur a fait paraître la première Partie de l'Ouvrage avec une préface de M. Clebsch ; la seconde Partie, achevée par M. Félix Klein, le collaborateur de Plücker et le confident de ses desseins, vient d'être mise en vente également. Quelques-uns des résultats contenus dans la première Partie avaient été déjà établis par M. Battaglini (**) en 1866 ; de son côté, M. Klein a développé les théories de Plücker, par les méthodes beaucoup plus élégantes de l'Algèbre supérieure, dans une Thèse et dans deux Notes insérées aux *Mathematische Annalen* (***). Nous allons essayer d'indiquer brièvement le point de départ de ces recherches et de donner une idée de leur portée.

L'équation

$$x\xi + y\eta + z\zeta = 1$$

est celle d'un plan (ξ, η, ζ), considéré comme lieu géométrique des points (x, y, z), ou bien celle d'un point (x, y, z), considéré comme pivot des plans (ξ, η, ζ). Un point est donc déterminé par trois coordonnées x, y, z, un plan par trois coordonnées ξ, η, ζ. Une ligne droite serait complétement déterminée par quatre constantes ou coordonnées, mais l'on obtient des formules plus symétriques en intro-

(*) *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 2e série, t. XI.

(**) *Atti della R. Acc. di Napoli*, t. III.

(***) *Math. Ann.*, t. II, p. 198 et 371.

duisant six coordonnées liées par une équation homogène, et qui n'entrent dans les équations de la droite que par leurs rapports.

Ces six coordonnées peuvent d'ailleurs être choisies de deux manières différentes, selon qu'on voudra définir la droite comme *rayon*, c'est-à-dire comme lieu géométrique des points (x, y, z), ou bien comme *axe*, c'est-à-dire comme intersection des plans (ξ, η, ζ).

Plücker prend pour *coordonnées radiales* de la droite les six quantités

$$X = x - x', \quad Y = y - y', \quad Z = z - z',$$
$$L = yz' - zy', \quad M = zx' - xz', \quad N = xy' - yx'.$$

Les trois premières sont les projections de la distance

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

de deux points de la droite; les trois dernières sont les projections de l'aire

$$S = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}$$

qui représente le double du triangle formé par les deux points et par l'origine. On a

$$(1) \qquad XL + YM + ZN = 0,$$

et les équations

$$Yz - Zy = L, \quad Zx - Xz = M, \quad Xy - Yx = N$$

sont celles des trois projections d'un rayon. Les rapports

$$\frac{X}{R}, \quad \frac{Y}{R}, \quad \frac{Z}{R}, \quad \frac{L}{S}, \quad \frac{M}{S}, \quad \frac{N}{S},$$

déterminent la direction du rayon et son plan, c'est-à-dire le plan passant par l'origine qui le renferme; le rapport

$$r = \frac{S}{R}$$

donne la distance du rayon à l'origine. Si R représente une force, S sera le moment de cette force. Les valeurs absolues des composantes X, Y, Z, L, M, N la déterminent dans l'espace; ce sont les *six coordonnées radiales d'une force*, et elles représentent cinq constantes à cause de la relation (1). Si l'on supprimait cette relation, les six coordonnées deviendraient indépendantes. Les trois premières (X, Y, Z) donneraient la direction et l'intensité d'une force, les trois autres (L,

M, N) l'axe et le moment d'un couple; on pourrait donc les appeler les *six coordonnées d'un dyname*, en entendant par ce mot la cause qui produit le mouvement d'un système rigide.

Les *coordonnées axiales* d'une droite sont les six quantités $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, qu'on obtient en écrivant ξ, η, ζ à la place de x, y, z dans les expressions des coordonnées radiales. Elles satisfont à la relation homogène

$$(2) \qquad \mathfrak{X}\mathfrak{L} + \mathfrak{Y}\mathfrak{M} + \mathfrak{Z}\mathfrak{N} = 0,$$

et les trois équations

$$\mathfrak{Y}\zeta - \mathfrak{Z}\eta = \mathfrak{L}, \quad \mathfrak{Z}\xi - \mathfrak{X}\zeta = \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{X}\eta - \mathfrak{Y}\xi = \mathfrak{N}$$

sont celles des points d'intersection d'un axe avec les plans coordonnés. En désignant encore par $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}$ les quantités analogues à R, S, on trouve, pour la même droite,

$$\frac{X}{\mathfrak{L}} = \frac{Y}{\mathfrak{M}} = \frac{Z}{\mathfrak{N}} = \frac{R}{\mathfrak{S}} = \frac{L}{\mathfrak{X}} = \frac{M}{\mathfrak{Y}} = \frac{N}{\mathfrak{Z}} = \frac{S}{\mathfrak{R}}.$$

Les six coordonnées axiales, multipliées par un certain facteur, déterminent une rotation. Si l'on supprime la relation (2), elles représentent les *six coordonnées d'un mouvement*, car elles déterminent alors une rotation autour d'un certain axe et une translation parallèle à un autre axe.

Toutes ces formules deviennent encore plus symétriques par l'introduction des coordonnées homogènes ou tétraédriques du point et du plan. Soit donc

$$x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 + x_4\xi_4 = 0$$

l'équation d'un plan $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$, ou celle d'un point (x_1, x_2, x_3, x_4). Les coordonnés radiales d'une droite seront les six déterminants

$$X_{\alpha\beta} = x_\alpha x'_\beta - x_\beta x'_\alpha,$$

qui satisfont à la relation

$$(3) \qquad X_{12}X_{34} + X_{13}X_{42} + X_{14}X_{23} = 0,$$

et la droite sera représentée par quatre équations de la forme

$$x_1 X_{23} + x_2 X_{31} + x_3 X_{12} = 0.$$

On obtiendra les coordonnées et les équations axiales en écrivant

partout ξ pour x, et l'on aura généralement

$$X_{\alpha\beta}\mathfrak{X}_{\alpha\beta} = X_{\gamma\delta}\mathfrak{X}_{\gamma\delta},$$

ou bien

$$(4) \qquad X_{\alpha\beta} = k.\mathfrak{X}_{\gamma\delta},$$

en désignant par k une constante et en associant les indices $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ comme dans l'équation (3).

Considérons maintenant une équation $f = 0$, dont les variables soient les six coordonnées radiales $X_{\alpha\beta}$; elle représente ce que Plücker appelle un faisceau ou *complexe de dynames*. Si les X satisfont à la condition (3), l'équation $f = 0$ est celle d'un *complexe de forces;* si, de plus, f est une fonction homogène des X, l'équation $f = 0$ représente un *complexe de rayons*. Si nous remplaçons les coordonnées radiales par les coordonnées axiales, nous avons des *complexes de mouvements, de rotations simples* et *d'axes*.

Il est clair d'ailleurs que, dans l'équation homogène $f = 0$, on peut écrire les X à la place des $\mathfrak{X}$, ou *vice versâ*, à cause de la relation (4). On prévoit aussi que les coordonnées absolues d'un dyname pourront remplacer celles du mouvement dont il est la cause, puisqu'il y a proportionnalité entre la cause et l'effet; on pourra confondre le dyname et le mouvement. « Ainsi, dit Plücker, dans la ligne droite se résout la réciprocité du point et du plan, dans le dyname la réciprocité des forces et des rotations. Un complexe de droites peut se mettre en équation de deux manières, un complexe de dynames également. Les propriétés des deux espèces de complexes offrent une dualité analogue. »

On peut encore supposer que l'équation $f = 0$ soit homogène, mais que la condition (3) ne soit pas remplie. « Dans ce cas, dit Plücker, on se trouve en présence de lieux géométriques qui sont aux dynames ce que les lignes droites sont aux forces et aux rotations. » On s'assure facilement que l'équation $f = 0$ représente alors des complexes d'axes principaux.

Le degré d'un complexe est celui de son équation. Les coordonnées $X_{\alpha\beta}$, qui y figurent comme variables, peuvent être considérées comme des fonctions linéaires des coordonnées x_α, x' de deux points. Par conséquent, si l'un de ces points est donné, l'équation $f = 0$ représente un faisceau de droites, ou un *cône de degré n*, dont le sommet se trouve au point donné. En coordonnées axiales, elle représente une

courbe de la classe n, située dans un plan donné. Les lignes droites appartenant à un complexe peuvent donc être groupées de deux manières : par cônes émanant de tous les points de l'espace, et par tangentes enveloppant une courbe dans tous les plans de l'espace.

Les droites communes à deux complexes forment une *congruence ;* celles qui appartiennent à trois complexes forment une surface réglée. Quatre complexes déterminent un nombre fini de droites dans l'espace. Les complexes de droites réalisent donc une Géométrie à quatre dimensions. On s'élève à six dimensions par la considération des dynames.

Plücker n'a élaboré que la théorie des complexes du premier et du second degré. Ceux du premier degré s'appellent *complexes linéaires.*

Toutes les droites d'un complexe linéaire qui passent par un point donné sont dans un plan, et toutes celles qui tombent dans ce plan se coupent en ce point. Chaque point de l'espace a donc son plan coordonné, et réciproquement. La ligne qui joint deux points, et l'intersection de leurs plans coordonnés, forment un couple de *polaires conjuguées.* Lorsqu'un plan tourne autour d'un axe, le point coordonné décrit un rayon qui est la polaire conjuguée de l'axe, et cette relation des deux droites est réciproque. Toute droite qui rencontre deux polaires conjuguées fait partie du complexe.

Un complexe linéaire est déterminé par cinq de ses droites, ou par une droite et deux polaires conjuguées. Les deux droites qui rencontrent quatre droites du complexe sont toujours deux polaires conjuguées.

Les points coordonnés à des plans parallèles forment une ligne droite que Plücker appelle le *diamètre du complexe.* Tous les diamètres du même complexe sont parallèles entre eux. Il y en a toujours un qui est perpendiculaire à ses plans : c'est l'*axe du complexe,* et ses plans s'appellent *sections principales.* Si nous prenons cet axe pour axe des z, l'équation du complexe ne renferme plus qu'une seule constante, le paramètre k ; elle devient

$$N + kZ = 0, \quad \text{ou bien} \quad \mathcal{Z} + k\mathcal{N} = 0.$$

Un complexe linéaire n'est point altéré par une translation parallèle à son axe, ni par une rotation autour de cet axe. Le rapport de la composante Z d'une force dirigée suivant un rayon du complexe,

au moment N de cette force par rapport à l'axe du complexe, est constant.

Un complexe linéaire peut être envisagé comme la réunion des tangentes menées à des hélices qui entourent l'axe du complexe. Le complexe est *droit* ou *gauche*, selon que le paramètre est positif ou négatif. Le plan coordonné à un point est un plan osculateur de l'hélice qui passe par ce point.

Dans une congruence linéaire, qui est, pour ainsi dire, l'intersection de deux complexes linéaires, chaque point de l'espace a sa droite *adjointe* qui le traverse (c'est l'intersection de ses deux plans coordonnés). Chaque plan renferme deux points qui lui sont coordonnés, et la droite qui les joint est la droite adjointe à ce plan. Ces relations définissent la congruence linéaire. On peut encore la définir : l'ensemble de toutes les droites qui coupent deux droites données (les *directrices* de la congruence). La droite adjointe à un plan est donc celle qui joint les points d'intersection de ce plan et des deux directrices.

Une congruence est déterminée par quatre de ses droites. Deux polaires conjuguées d'un complexe sont les directrices d'une congruence qui appartient à ce complexe. Les deux directrices d'une congruence sont deux polaires conjuguées de chacun des complexes dont cette congruence fait partie.

Trois complexes linéaires déterminent une surface du second ordre et de la deuxième classe. Plücker fait voir que toutes les propriétés de ces surfaces peuvent être déduites de la discussion des trois équations linéaires qui représentent trois complexes.

Les complexes du second degré donnent lieu à des théorèmes analogues.

Chaque plan de l'espace renferme une courbe de la deuxième classe, appartenant au complexe donné.

Un plan étant transporté parallèlement à lui-même, sa courbe décrit une *surface équatoriale ;* s'il tourne autour d'un axe, sa courbe décrit une surface *méridienne ;* ces surfaces sont du quatrième ordre et de la quatrième classe. Les courbes génératrices s'appellent respectivement *parallèles* et *méridiens* de la surface qu'elles engendrent.

Les centres des parallèles d'une surface équatoriale sont situés sur une droite : c'est le *diamètre* de la surface. Les pôles de l'axe d'une surface méridienne, pris par rapport aux méridiens successifs, for-

ment aussi une droite, la *polaire* de la surface. Chaque point de l'axe d'une surface méridienne est d'ailleurs le sommet d'un cône du complexe qui enveloppe cette surface. Les plans polaires de l'axe, pris par rapport à tous ces cônes, enveloppent la polaire de la surface méridienne. Une surface équatoriale est enveloppée par une infinité de cylindres parallèles au plan dont le mouvement engendre la surface en question.

Le diamètre d'une surface équatoriale est un diamètre du complexe; on l'appelle *axe du complexe*, s'il est perpendiculaire au plan qui engendre la surface. Un complexe du second degré a trois axes rectangulaires, qui sont parallèles aux axes d'une surface de la deuxième classe dont le centre et les dimensions restent indéterminés; Plücker l'appelle la *caractéristique* du complexe. A trois diamètres conjugués de la caractéristique correspondent trois diamètres conjugués du complexe, qui sont parallèles aux premiers, mais qui généralement ne se coupent pas. Les complexes du second degré ont, en général, un centre. Dans certains cas, ils enveloppent une surface du second degré.

Dans un complexe du second degré, à chaque plan correspond un point, qui est le *pôle* de ce plan, et à chaque point un plan, qui est le *plan polaire* de ce point. Cette correspondance est réciproque, si le complexe enveloppe une surface du second degré.

Plücker appelle *point singulier* du complexe un point dont le cône se réduit à deux plans, et *plan singulier* un plan dont la courbe se réduit à deux points. La ligne d'intersection des deux plans et la ligne de jonction des deux points sont des *droites singulières* du complexe. Les points singuliers d'un complexe du second degré forment une surface du quatrième ordre et de la quatrième classe, qu'enveloppent les plans singuliers, et qui possède 16 points doubles et 16 plans doubles.

Nous ne suivrons pas l'auteur dans la discussion des cas particuliers qui peuvent se présenter, ni dans sa classification des surfaces appartenant aux complexes du second degré. Il fait voir qu'il est facile de construire ces surfaces de manière à en avoir l'intuition géométrique. M. Epkens a fait, sous la direction de Plücker, de nombreux modèles de surfaces de ce genre.

Ce qui précède suffira pour donner au lecteur une idée des résultats auxquels conduit la méthode du géomètre allemand. M. Félix Klein, à qui nous devons la publication de la seconde Partie de

l'Ouvrage, achevée par lui à l'aide de ses souvenirs, a déjà consacré à la théorie des complexes plusieurs Mémoires, où il traite le sujet à un point de vue nouveau. Il suppose que l'équation de condition (3), à laquelle satisfont les coordonnées d'un complexe de droites, a été transformée par une substitution linéaire de telle manière qu'elle ne renferme plus que les carrés des nouvelles variables :

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0.$$

Les équations $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ... sont alors celles de six complexes linéaires, que M. Klein appelle les *complexes fondamentaux*, et dont deux quelconques sont « en involution ». L'équation d'un complexe du second degré, étant transformée à l'aide des mêmes variables, devient

$$k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \ldots + k_6 x_6^2 = 0.$$

C'est en discutant ces formes canoniques de l'équation du complexe et de l'équation de condition que M. Klein arrive à une série de théorèmes très-intéressants sur les surfaces de Kummer (surfaces du quatrième ordre, qui sont ici formées par les points singuliers d'un complexe du second degré).

Nous nous arrêtons là, pour ne pas dépasser les limites imposées à un compte rendu sommaire. Il est fort possible que les nouvelles théories que Plücker a léguées à ses successeurs conduisent un jour à des applications d'une grande importance. Il en a déjà indiqué une, en traitant par la méthode des complexes la double réfraction d'un faisceau lumineux dans un cristal.

R. Radau.

BALTZER (Dr Richard), Professor am städtischen Gymnasium zu Dresden, Mitglied der k. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. — Die Elemente der Mathematik. Erster Band : *Gemeine Arithmetik, Allgemeine Arithmetik, Algebra.* — Dritte verbesserte Auflage. In-8°; 1868. Leipzig, Verlag von S. Hirzel (*).

Le succès de ces Éléments, dans un pays où les traités classiques ne manquent pas plus que chez nous, et où la concurrence n'est pas

(*) *Éléments de Mathématiques*, par le Dr R. Baltzer, professeur au Gymnase de la Ville à Dresde, Membre de la Société royale des Sciences de Saxe à Leipzig (actuellement professeur à l'Université de Giessen). Tome Ier : *Arithmétique élémentaire, Arithmétique générale, Algèbre.* 3e edit., revue et corrigée. Leipzig, chez S. Hirzel; 1868. In-8°.

entravée par des programmes uniformes, est une preuve de la haute valeur de cet Ouvrage, dont la première édition a paru en 1860, et que M. Cremona a traduit en 1865 pour l'usage des écoles publiques de l'Italie.

Nous avons déjà rendu compte, dans un autre Recueil (*), des Éléments de Géométrie, qui forment la seconde Partie du cours de M. Baltzer, et dont la seconde édition a été imprimée en 1867. Il nous reste à parler avec détail de la première Partie.

En parcourant la Table des matières de ce mince volume de 289 pages, on est tenté de croire qu'on n'y rencontrera qu'un simple recueil d'énoncés. En lisant l'Ouvrage, on est surpris d'y trouver, sous une forme concise, mais claire et complète, les démonstrations et les développements de tant de théories diverses, dont un autre auteur aurait pu remplir plusieurs gros volumes.

Comme nous l'avons fait remarquer ailleurs, ce livre n'est point destiné aux personnes qui veulent étudier sans maître, et qui ont besoin d'une exposition beaucoup plus détaillée et ne laissant rien à deviner. Mais s'il s'agit d'un précis à mettre entre les mains des jeunes gens qui suivent les leçons d'un professeur, le cadre adopté par M. Baltzer nous semble réunir au plus haut degré toutes les conditions désirables. Nous nous permettrons d'insister d'autant plus sur ce point, que les livres élémentaires qui se publient dans notre pays semblent s'éloigner de plus en plus de cet idéal, les auteurs cherchant à dissimuler la banalité du fond par la surcharge des accessoires; d'où il résulte ce double inconvénient, de ne point s'adapter à la méthode d'enseignement d'un autre professeur, et d'empêcher les élèves de chercher par eux-mêmes, en leur présentant, qu'on nous passe le mot, la besogne toute mâchée (**). Le livre de M. Baltzer, au contraire, ne donnant que le résumé des démonstrations, laisse le professeur libre de les développer à sa guise, et ses sommaires sont

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. II, p. 124-132.

(**) Nous ne saurions trop recommander aux professeurs un Ouvrage peu connu en France et conçu dans le même esprit que le cours de M. Baltzer :

J. H. VAN SWINDEN's *Elemente der Geometrie*, aus dem Holländischen übersetzt und vermehrt, von C. F. A. JACOBI, Professor an der Landesschule Pforta. Iena, Fr. Frommann; 1834. In-8°.

Ce livre est précieux par le grand nombre d'énoncés de problèmes qu'y a joint le traducteur.

cependant assez étendus pour que l'élève y trouve la substance des leçons, avec des exemples bien choisis pour la fixer dans l'esprit.

Un des principaux mérites qui distinguent les Ouvrages de M. Baltzer, c'est l'érudition aussi sûre qu'étendue dont il fait preuve dans les courtes notes placées au bas des pages, et indiquant l'origine de chaque proposition et de chaque dénomination. L'ensemble de ces notes forme un précieux résumé de l'histoire des Mathématiques élémentaires.

Le Volume, comme l'indique le titre, se divise en trois Livres, subdivisés eux-mêmes en Paragraphes, et dont nous allons faire connaître brièvement le contenu.

LIVRE I. — *Arithmétique élémentaire* (p. 3-58).

§§ 1, 2, 3. Les quatre opérations fondamentales. — Nous y trouvons entre autres cette indication, de commencer la multiplication par la gauche du multiplicateur, ce qui est très-commode pour la pratique de la multiplication abrégée.

§ 4. Calcul des mesures exprimées en fractions duodécimales. Calcul du temps.

§ 5. Proportionnalité des nombres.

§ 6. Règles de trois, d'intérêts, etc.

§ 7. Propriétés élémentaires des nombres entiers : Divisibilité, nombres premiers, etc.

§§ 8-11. Opérations sur les fractions ordinaires.

§ 12. Règle de trois avec des fractions et des mesures duodécimales. — La complication de ces calculs est de nature à faire désirer l'établissement universel du système métrique décimal.

§ 13. Partages proportionnels, règles d'alliage, etc. (*Voir* ci-après, Livre III, § 1.)

§§ 14-17. Opérations sur les fractions décimales.

§ 18. Calculs d'approximation; opérations abrégées.

LIVRE II. — *Arithmétique générale* (p. 61-197).

§ 1. Préliminaires : Définitions et notations.

§§ 2-4. Opérations directes (addition, multiplication, élévation aux puissances). — A partir d'ici, l'auteur indique, pour chaque Paragraphe, les exercices correspondants du Recueil de Heis (*).

§ 5. Opérations inverses.

§ 6. Formules.

§ 7. Soustraction. Nombres positifs et négatifs; quantités opposées. — L'auteur laisse au professeur le soin de donner, sur la question délicate des quantités négatives, les développements nécessaires.

§§ 8-9. Addition, soustraction, multiplication des polynômes.

§§ 10-12. Division des polynômes.

§ 13. Propriétés des nombres entiers : Divisibilité, nombres premiers et composés. Combien il y a de nombres premiers à un nombre donné et moindres que lui. Résidus des puissances. Théorèmes de Fermat et d'Euler. Résidus et non-résidus quadratiques. Théorème de Wilson.

§§ 14-15. Carré et racine carrée d'un nombre décimal.

§ 16. Radicaux carrés. Nombres rationnels et irrationnels. Nombres réels, imaginaires, complexes.

§§ 17-18. Puissances et racines. Exposants négatifs et fractionnaires. Racines de l'unité; racines primitives.

§ 19. Logarithmes des divers systèmes.

§§ 20-21. Logarithmes décimaux. Construction et usage des tables. Calculs au moyen des logarithmes. Logarithmes d'addition et de soustraction. — L'auteur aurait pu indiquer la méthode très-simple de Briggs pour calculer les logarithmes décimaux, en déterminant, par de simples multiplications abrégées, le nombre des chiffres dont se compose la puissance 10^n d'un nombre donné. Il n'emploie pas la manière adoptée en France pour écrire les caractéristiques négatives et qui est cependant beaucoup plus commode que celle dont on fait usage en Allemagne. Il calcule tous ses exemples numériques au moyen des Tables de logarithmes à 4 décimales de J.-H.-T. Müller (**).

(*) *Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra*. 23te Aufl. Köln, Du Mont-Schauberg, 1869. Prix : 1 Thlr.

(**) *Vierstellige Logarithmen der natürlichen Zahlen und Winkelfunctionen*. Halle,

§ 22. Progressions géométriques. Intérêts composés. Annuités.

§ 23. Formule du binôme pour un exposant entier et positif. Limite des racines d'un binôme.

§§ 24-25. Permutations, arrangements, combinaisons.

§ 26. Déterminants (*).

§ 27. Produits et puissances des polynômes.

§ 28. Nombres figurés et progressions arithmétiques.

§ 29. Notions sur le calcul des probabilités.

§ 30. Fractions continues.

§§ 31-32. Série exponentielle. Exposants imaginaires. Théorème de Moivre. Série du binôme. Série logarithmique. Influence de l'ordre des termes sur la valeur d'une série dont la convergence dépend des signes des termes.

LIVRE III. — *Algèbre* (p. 201-289).

§ 1. Proportions. Grandeurs commensurables, incommensurables. Moyenne entre des quantités données.

§ 2. Variables, fonctions. Proportionnalité. Continuité. Fonctions algébriques et transcendantes. Fonctions homogènes. Fonctions symétriques et alternées.

§ 3. Méthode analytique. Calculs, constructions.

§ 4. Équations. Identités. Équations non identiques, leurs racines. Équations transformées équivalentes. Degré d'une équation. Équations algébriques et transcendantes.

§ 5. Systèmes d'équations à plusieurs inconnues. Équations déterminées et indéterminées. Résolution d'un système d'équations linéaires, déterminées ou indéterminées.

XIV-25 p., gr. in-8°. Il serait temps de renoncer en France à la coutume peu rationnelle d'employer dans l'enseignement des tables à sept décimales. Ce luxe de chiffres ne sert qu'à masquer les méthodes de calcul, et à faire naître l'idée fausse d'une précision que les éléments du calcul ne peuvent jamais fournir. Une table à trois décimales, sur une carte grande comme la main, remplacerait bien utilement les gros in-octavo, qui font perdre tant de temps aux élèves, et les empêchent d'apprendre à calculer.

(*) Les éléments de la théorie des déterminants font partie de tous les Traités modernes d'Algèbre édités en Allemagne, en Angleterre, en Italie.

§ 6. Équations du second degré. Maximum ou minimum d'une fonction du second degré. Réduction d'une forme quadratique. Systèmes d'équations non linéaires. Exercices sur les systèmes d'équations symétriques qui se ramènent à des équations du second degré.

§ 7. Équations du troisième et du quatrième degré. Équations réciproques. Calcul approché de la plus grande racine réelle de l'équation $x^m - x - a = 0$.

§ 8. Équations transcendantes. Résolution des équations numériques. Méthode de Newton.

§ 9. Résolution des équations indéterminées. Résolution des équations linéaires en nombres entiers. Équation de Pythagore, équation $x^y = y^x$, etc.

§ 10. Théorèmes sur les fonctions algébriques. Diviseurs d'une fonction entière. Diviseurs rationnels. Une équation du $n^{ième}$ degré a n racines. Racines multiples. Règle de Descartes. Théorèmes de Sturm et de Cauchy. Valeurs conjuguées d'une fonction algébrique. Norme d'une fonction irrationnelle. Résultante de deux fonctions entières.

J. Hoüel.

BRIOT (Ch.), professeur suppléant à la Faculté des Sciences. — Théorie mécanique de la chaleur. — In-8, avec figures dans le texte, xii-352 pages; 1869. Paris, Gauthier-Villars. Prix : 7 fr. 50 c.

« La Théorie mécanique de la Chaleur date seulement d'un petit nombre d'années, mais elle s'est développée avec une telle rapidité, qu'elle constitue aujourd'hui un vaste corps de doctrines appuyé sur de nombreuses recherches expérimentales. M. Briot en donne, dans son livre, une exposition théorique; il s'est attaché à mettre en relief les principes et les hypothèses fondamentales, ainsi que les conséquences les plus importantes, sans insister sur les points de détail, sur la discussion des expériences ni sur les questions encore controversées.

» Dans un premier Chapitre, l'auteur développe les principaux théorèmes de mécanique dont on fera particulièrement usage, les propriétés générales des systèmes, la définition de l'énergie et les différentes formes sous lesquelles elle se présente dans les phéno-

mènes. L'Ouvrage est ensuite divisé en deux Parties, dont l'une comprend la *Chaleur* proprement dite et l'autre l'*Électricité*.

» L'étude de la Chaleur repose sur deux principes, dont le premier, appelé *Principe de l'équivalence de la Chaleur et du Travail mécanique*, est la conséquence directe de l'assimilation de la chaleur à un mouvement moléculaire. Le second principe, établi d'abord par Carnot dans l'hypothèse de la matérialité du calorique, conserve toute son importance dans la nouvelle théorie ; on n'en peut pas donner une démonstration rigoureuse, parce qu'il renferme un élément, la *température*, dont on ne connaît pas les conditions mécaniques, mais on peut le considérer comme une définition de la température.

» Ces deux principes, joints aux données de l'expérience, permettent d'établir les propriétés générales des gaz et des vapeurs, le jeu des machines à feu, l'écoulement des fluides, etc.

» Jusque-là on a laissé complétement indéterminée la constitution moléculaire des corps ; une première tentative dans cette voie nouvelle a été faite par M. Clausius pour les gaz ; l'examen de cette théorie des gaz termine la première Partie de l'Ouvrage.

» L'électricité statique repose sur la notion des fluides électriques, dont les molécules obéissent à la loi de Coulomb ; tous les phénomènes deviennent des conséquences de cette loi élémentaire, et la *théorie du potentiel* donne à cette partie de la science un remarquable caractère de précision et d'élégance.

» Pour la théorie des courants électriques, il faut une nouvelle hypothèse, celle de la force électromotrice, que la plupart des physiciens attribuent aujourd'hui au simple contact de deux corps, comme l'avait énoncé Volta.

» Dans la théorie de l'Électrodynamique, on admet qu'il existe entre deux éléments de courant une force dirigée suivant la droite qui joint leurs centres, et l'expérience indique qu'elle varie en raison inverse du carré de la distance. Cette loi d'Ampère n'est pas liée à celle de Coulomb, et ne suffit pas pour expliquer les phénomènes d'induction. Il y a là une lacune que M. Weber a essayé de combler, en admettant que l'action de deux molécules électriques dépend non-seulement de leur distance, mais encore de leurs vitesses. Cette formule de Weber a l'inconvénient d'entraîner l'hypothèse de deux fluides électriques ; mais elle a l'avantage de renfermer les lois de Coulomb et d'Ampère, et de rendre compte des phénomènes d'induction. »

Les lignes précédentes, extraites du *Bulletin de l'Association scientifique,* expliquent, mieux que nous ne saurions le faire, la nature des questions traitées dans le livre de M. Briot. Cet important sujet des lois de la transformation des forces physiques est maintenant, s'il est permis d'employer ici une expression parlementaire, à l'ordre du jour. Verdet, M. Briot l'ont successivement exposé à la Faculté des Sciences ; M. Bertrand l'a pris cette année pour texte de ses leçons au Collége de France. M. Briot aura donc contribué, à la fois par son enseignement si apprécié et par son livre, à la diffusion de ces belles et récentes idées qui paraissent destinées à renouveler la Physique tout entière. Il serait superflu, d'ailleurs, de louer la forme que l'auteur a su donner à son exposition. Ceux qui nous lisent connaissent les Ouvrages élémentaires de M. Briot qui rendent tant de services aux élèves de nos Lycées ou de nos Facultés, la *Théorie des fonctions doublement périodiques* publiée en collaboration avec M. Bouquet, et l'*Essai sur la théorie mathématique de la lumière* dont l'intérêt et le succès sont attestés par la traduction récente qui vient d'en être faite en Allemagne.

G. D.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN, gegründet von H. C. SCHUMACHER, herausgegeben von Professor Dr C.-A.-F. PETERS, Director der Sternwarte in Altona (*).

T. LXXIII, nos 1729-1752, 1869.

SCHÖNFELD. — *Sur les changements d'éclat des étoiles variables.* (32 col.; all.)

SPÖRER. — *Observations des taches du Soleil.* (8 col. ; all.)

WEINGARTEN (Jul.). — *Sur un problème de géodésie* (12 col.; all.)

(*) *Nouvelles Astronomiques,* fondées par H. C. SCHUMACHER, publiées par C.-A.-F. Peters, directeur de l'Observatoire d'Altona. Altona, imprimerie et lithographie de Hammerich et Lesser.

Cette publication a été fondée en 1823, par H.-Chr. Schumacher, et paraît en allemand, en anglais et en français, par feuilles in-4° à deux colonnes; vingt-cinq feuilles forment un volume.

Secchi (A.). — *Sur les spectres d'étoiles.* (8 col.; fr.)

Falb (R.). — *La comète de Halley et ses météorites.* (4 col.; all.)

Lüroth (J.). — *Sur la détermination de l'erreur probable.* (4 col.; all.)

Hoek (M.). — *Sur la différence entre les constantes d'aberration de Delambre et de Struve.* (7 col.; fr.)

Discussion de la question : Si un rayon de lumière est entraîné par le mouvement du milieu dans lequel il se propage.

Liais (E.). — *Observation du passage de Mercure sur le Soleil, le 5 novembre* 1868, *faite à Atalaïa (Brésil).* (5 col.; fr.)

Kayser (E.). — *Étude de la Lune au point de vue de la forme ellipsoïdale.* (16 col.; all.)

L'auteur trouve 0,0329 pour la valeur de l'excentricité.

Schmidt (J.). — *Détermination des changements périodiques de la Comète II,* 1861. (18 col.; all.)

Schur (W.). — *Sur la détermination de l'orbite de l'étoile double* 70 *d'Ophiuchus.* (3 p.; all.)

Lehmann (W.). — *Éléments des orbites des huit planètes principales pour l'époque fondamentale* 1800, *janvier* 1, *avec leurs variations séculaires du premier et du second ordre.* (Suite et fin d'articles insérés dans les volumes précédents; all.)

Radau (R.) — *Considérations sur le théorème des aires.* (8 col.; all.)

Tietjen (F.). — *Sur l'incertitude d'une détermination d'orbite par trois observations, lorsque celles-ci sont situées à peu près géocentriquement sur un même grand cercle.* (10 col.; all.)

T. LXXIV, n°s 1753-1776, 1869.

Oudemans (J.-A.-C.). — *Observations de l'éclipse totale de Soleil du* 18 *août* 1868, *dans l'île du Petit Montawalu, baie de Tomini (côte Est de Célèbes).* (2 art., 24 col., 1 pl.; all.)

Peters (C.-H.-F.). — *Sur certains corps passant devant le Soleil.* (all.)

Il s'agit de corpuscules observés à Naples, considérés d'abord comme des astéroïdes, et reconnus ensuite pour n'être que des oiseaux.

Schmidt (I.-F.-J.). — *Points de radiation et densité horaire des météores.* (16 col.; all.)

Tietjen (F.). — *Observations spectroscopiques du Soleil.* (6 col.; all.)

Weiler (A.). — *Sur l'élimination du nœud dans le problème des trois corps.* (16 col.; all.)

Schjellerup. — *Une uranométrie du* x^e *siècle.* (8 col.; all.)

Challis. — *Sur la théorie de la constante de l'aberration.* (angl.)

Schubert (E.). — *Perturbations générales des coordonnées rectangulaires de Parthénope par Jupiter et Saturne, en unités du septième ordre décimal, et détermination de l'orbite par leur moyen.* (14 col.; angl.)

Radau (R.). — *Nouvelles remarques sur le problème des trois corps.* (8 col.; all.)

Wittstein. — *Sur la déviation de la verticale à de grandes hauteurs.* (4 col.; all.)

Jordan (W.). — *Sur la détermination de l'exactitude des observations répétées d'une seule inconnue.* (18 col.; all.)

Von Andræ. — *Lettre au sujet du Mémoire précédent.* (dan.)

Powalky. — *Les phénomènes dans les contacts intérieurs du passage de Vénus en* 1769. (6 col.; all.)

Zöllner (F.). — *Observation des protubérances.* (4 col., 1 pl.; all.)

Breen (H.). — *Sur les corrections des éléments de Jupiter et de Saturne donnés par Bouvard (Paris,* 1821).

Zöllner (J.-C.-F.). — *Nouveau spectroscope et contributions à l'analyse spectrale des étoiles.* (12 col.; all.)

Schönfeld. — *Tables des variations d'éclat de* δ *de la Balance.* (16 col.; all.)

Erman (A.). — *Sur quelques déterminations magnétiques.*

1. Éléments du magnétisme terrestre et ses variations séculaires pour Berlin. (22 col.; all.)

T. LXXV, nos 1777-1796; 1869-70.

Schönfeld. — *Résultats d'études sur la variation de β de la Lyre et de δ de Céphée.* (24 col.; all.)

Celoria (G.). — *Détermination de l'orbite de Clytie.* (2 col.; ital.)

Argelander. — *Sur les étoiles observées par Piazzi, mais non inscrites dans son nouveau Catalogue.* (29 col.; all.)

Peters (C.-F.-W.). — *Quelques remarques sur le prochain passage de Vénus, en* 1874. (6 col.; all.)

Klinkerfues. — *Lettre au Rédacteur.* (6 col.; all.)
Sur la détermination des orbites par des observations géocentriques.

Boguslaw von Prondzynski. — *Sur le nombre des équations entre les angles et les sinus dans la comparaison des réseaux de triangles.* (4 col.; all.)

Weingarten (J.). — *Sur la réduction des angles d'un triangle sphéroïdique à ceux d'un triangle plan ou sphérique.* (6 col.; all.)

Oppolzer (Th.). — *Sur la comète vue par Pons en février* 1808. (all.)

Weiler (A.). — *Sur l'élimination du nœud dans le problème des trois corps.* (15 col.; all.)

Spörer. — *Observations des taches du Soleil.* (2 art., 21 col.; all.)

Veltmann (W.) — *Hypothèse de Fresnel pour l'explication des phénomènes d'aberration.* (15 col.; all.)

Leppig (H.). — *Observations des taches du Soleil, faites à l'Observatoire de Leipzig.* (8 col.; all.)

Möller (Axel). — *Perturbations générales de Pandore.* (7 col.; all.)
Les calculs ont été faits par la méthode de Hansen.

Erman (A.). — *Sur quelques déterminations magnétiques.*
2. Deux déterminations magnétiques dans l'Inde, par K. Koppe, et leur emploi théorique. (17 col.; all.)

Jordan (W.). — *Sur l'exactitude des triangulations de l'Allemagne du Sud.* (18 col.; all.)

Paschen. — *Sur l'application de la photographie à l'observation des passages de Vénus sur le Soleil.* (14 col.; all.)

JOURNAL de mathématiques pures et appliquées ou Recueil mensuel de Mémoires sur les diverses parties des Mathématiques, publié par Joseph Liouville, membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes, professeur au Collége de France. 2e série, T. XIV; 1869 (*).

Liouville (J.). — *Extrait d'une lettre adressée à M. Besge.* (6 p.)

Liouville (J.). — *Sur les nombres entiers de la forme* $12k+5$. (2 p.)

Gournerie (J. de la). — *Mémoire sur les lignes spiriques.* (54 p.)

« Les lignes spiriques ou sections planes du tore, dit M. de la Gournerie, ont anciennement occupé les géomètres, comme on le voit dans les savantes Notices historiques que MM. Quételet et Chasles ont données sur ces courbes; mais, jusque dans ces dernières années, on s'était borné à étudier leurs diverses formes. C'est principalement à cet ordre de recherches que se rapporte le Mémoire de M. Pagani, couronné par l'Académie de Bruxelles en 1824.

» Depuis cette époque, MM. Yvon Villarceau, J.-A. Serret, Garlin, Cornu, Mannheim et Darboux ont trouvé des théorèmes importants sur les spiriques. Enfin, leur théorie a été enrichie des résultats considérables obtenus par MM. Salmon, Moutard, Darboux, Laguerre et Crofton sur les courbes du quatrième ordre qui ont deux points doubles à l'infini sur un cercle, car les spiriques sont une variété de ces lignes.

» Je me propose de faire connaître plusieurs propriétés nouvelles des spiriques, et de présenter une classification de ces courbes. »

Le Mémoire commence par l'étude d'une involution spéciale du

(*) Ce Recueil paraît tous les mois depuis 1836 par cahiers in-4° de 40 pages. La prepremière série se compose de 20 volumes et se termine en 1856; la deuxième série comprend 14 volumes jusqu'au mois de janvier 1870. Prix par an : 30 fr. Nous saisissons cette occasion pour féliciter M. Gauthier-Villars des soins si éclairés qu'il apporte à l'impression de ce Journal, et qui en font une des plus belles publications périodiques que nous connaissions. G. D.

quatrième ordre, étude d'où l'auteur déduit une nouvelle méthode de résolution de l'équation du quatrième degré.

La deuxième Partie comprend quelques théorèmes très-simples, relatifs aux courbes nommées *anallagmatiques* par M. Moutard, et qui ne changent pas de forme quand on opère une transformation par rayons vecteurs réciproques avec un pôle convenablement choisi.

La troisième Partie comprend l'étude spéciale des spiriques et des tores droits ou obliques qui passent par ces courbes.

Mathieu (E.). — *Mémoire sur le mouvement de la température dans le corps renfermé entre deux cylindres circulaires excentriques et dans des cylindres lemniscatiques.* (16 p.)

Gournerie (J. de la). — *Mémoire sur les lignes spiriques* (suite). (36 p.)

Spiriques homofocales. Propriétés métriques relatives aux foyers. Classification des spiriques. Étude des différentes classes.

Jordan (C.). — *Théorèmes sur les équations algébriques.* (8 p.)

Nous rendrons compte de ce travail en même temps que du *Traité des substitutions et des équations algébriques.*

Jordan (C.). — *Sur l'équation aux vingt-sept droites des surfaces du troisième degré.* (20 p.)

Radau (R.). — *Sur une propriété des systèmes qui ont un plan invariable.* (57 p.)

L'auteur reprend d'abord l'idée de Jacobi, qui consiste à éliminer deux variables à l'aide d'une seule intégrale des aires. Le plan des aires étant pris pour celui des x, y, on peut introduire des axes mobiles déterminés par une équation $f(x, y) = 0$ (*), qui donne encore $\frac{df}{dt} = 0$. Soit Ω la longitude de l'axe des x, les vitesses absolues seront $x' - y\Omega'$, $y' + x\Omega'$, z'. En les substituant dans $H = T - U$, si la fonction des forces U ne dépend que des positions relatives, H renfermera Ω', mais non Ω. Si dès lors on désigne par p, q, r, K les dérivées de T par rapport à x', y', z', Ω', et qu'on exprime H en x, y, z, p, q, r, K, on aura pour n points $6n + 2$ équations différen-

(*) Pour abréger, nous écrirons x, y au lieu de $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

tielles, dont deux seront :

$$\frac{d\Omega}{dt}=\frac{\partial H}{\partial K}, \quad \frac{dK}{dt}=0;$$

l'une donne l'intégrale des aires, $K =$ const., l'autre se réduit à une quadrature, il ne reste donc que $6n$ équations différentielles, d'où *deux* variables s'éliminent par les équations $f=0, f'=0$. De même, *trois* intégrales des aires permettent d'éliminer *quatre* variables. On déterminera trois axes mobiles par trois équations $f_1=0$, $f_2=0$, $f_3=0$, et désignant par x^0, y^0, z^0 les trois rotations du système autour de ces axes, on prendra pour les vitesses les expressions $x'+y^0z-z^0y, \ldots$. Les intégrales des aires pourront s'écrire :

$$\frac{\partial T}{\partial x^0}=\sqrt{K^2-\pi^2}\sin\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial y_0}=\sqrt{K^2-\pi^2}\cos\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial z^0}=\pi,$$

K étant une constante, $\frac{\pi}{K}$ le cosinus de l'inclinaison du plan des x, y sur le plan invariable, et φ la distance de l'axe des x au nœud. La fonction H étant exprimée en x, y, z, φ, p, q, r, π, les équations du mouvement, au nombre de $6n+2$, seront :

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x}, \ldots, \quad \frac{d\varphi}{dt}=\frac{\partial H}{\partial \pi}, \quad \frac{d\pi}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial \varphi};$$

mais les six équations $f_1=0, f'_1=0, \ldots$ les réduisent à $6n-4$; on a donc éliminé *quatre* variables. En outre, on trouvera la longitude du nœud Ω par la quadrature $\frac{d\Omega}{dt}=\frac{\partial H}{\partial K}$.

En ajoutant aux équations des axes les six intégrales du centre de gravité, $\Sigma mx=0$, $\Sigma mx'=0, \ldots$, on réduit le nombre des variables à $6n-10$, et à $6n-12$ par l'intégrale des forces vives et par l'élimination directe du temps; le problème des trois corps revient ainsi à 6 équations du premier ordre. L'élimination peut se faire en prenant pour T l'expression

$$T+\alpha_1 f'_1+\ldots+\beta_1\Sigma mx'+\ldots$$

et en supposant les multiplicateurs α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 déterminés par la condition que six des dérivées p, q, r s'annulent identiquement. M. Radau développe le calcul pour le cas où les axes mobiles sont les axes principaux d'inertie, et pour quelques autres cas en se

bornant à trois corps. Si, au lieu de rapporter le système à son centre de gravité, on le rapporte à l'un des points que l'auteur appelle *points canoniques*, un corps du système se trouve *eo ipso* éliminé, sans que la forme des intégrales soit changée. C'est un cas particulier de la transformation bien connue que Jacobi a proposée pour le problème des trois corps. Dans le cas de trois corps, on exclut ainsi le « corps principal », les orbites des deux « planètes » se coupent dans le plan invariable, et en désignant par r, r_1 leurs rayons vecteurs, par u, u_1 leurs distances au nœud, par γ, γ_1, f, f_1 leurs vitesses radiales et aréolaires, on aura

$$2T = \frac{1}{m}\left(\gamma^2 + \frac{f^2}{r^2}\right) + \frac{1}{m_1}\left(\gamma_1^2 + \frac{f_1^2}{r_1^2}\right),$$

la fonction U renfermera r, r_1, u, u_1 et l'inclinaison relative λ des orbites, qui s'exprime en f, f_1 par l'équation

$$f^2 + f_1^2 + 2ff_1 \cos\lambda = K^2.$$

Les équations du mouvement deviennent

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \gamma}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial r}, \quad \frac{du}{dt} = \frac{\partial H}{\partial f}, \quad \frac{df}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial u},$$

puis quatre analogues où les variables ont l'indice 1. Après avoir intégré par deux ellipses, on aurait pour chaque corps quatre équations donnant les variations des constantes canoniques.

L'auteur montre encore que la réduction des variables à $6n - 12$ peut s'obtenir directement par la considération des orbites instantanées, et qu'on arrive alors à la classification des intégrales du problème des trois corps donnée par M. Bertrand. Il termine en faisant voir que la même réduction résulte de l'emploi des formules relatives à des axes mobiles :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \xi + yz^0 - zy^0, \ldots \\ \dfrac{d\xi}{dt} = X + \eta z^0 - \zeta y^0, \ldots \end{cases}$$

où x, y, z sont les coordonnées (absolues ou relatives), ξ, η, ζ les vitesses, X, Y, Z les forces données, enfin x^0, y^0, z^0 les trois rotations

du système autour des axes mobiles. Le nombre de ces équations différentielles est $6n-6$, si l'on emploie les coordonnées relatives. Pour éliminer les rotations, on a les trois équations $f'_1=0, f'_2=0, f'_3=0$, qui dérivent de celles des axes mobiles; ces dernières et l'élimination de dt réduisent les variables à $6n-10$. On arrive à $6n-12$ par les intégrales $H=$ const., $K^2=$ const. Mais on peut aussi arriver à $6n-11$, *sans employer une seule intégrale*, si les forces sont des fonctions homogènes des coordonnées de la dimension ε; il suffit, pour cela, de diviser les coordonnées par une distance ρ du système, les vitesses par $\rho^{\frac{1+\varepsilon}{2}}$, et dt par $\rho^{\frac{1-\varepsilon}{2}}$; la variable ρ disparaît alors, et l'on gagne une relation entre les nouvelles variables $\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, \frac{z}{\rho}, \ldots$.

Didon (F.). — *Méthode de Cauchy pour l'inversion de l'intégrale elliptique.* (11 p.)

Cette méthode se trouve développée dans une série de Notes insérées par Cauchy en 1843, dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XVII. Ces Notes sont consacrées à l'étude de produits que Cauchy appelle *factorielles réciproques*, et qui ne sont autre chose que les fonctions Θ de Jacobi. M. Didon expose, avec les notations de Jacobi, les méthodes de Cauchy; il en déduit en outre, ce que n'avait pas fait Cauchy, le théorème relatif à l'addition des arguments.

Mathieu (E.). — *Sur le mouvement vibratoire des plaques.* (19 p.)

Poisson (*) et Cauchy (**) avaient déjà étudié le mouvement vibratoire des plaques. Mais leur solution a été critiquée par M. Kirchhoff, qui a montré que les conditions aux limites imposées par Poisson et Cauchy sont incompatibles. M. Mathieu adresse à son tour des objections à la méthode de M. Kirchhoff (***), et traite de nouveau la théorie du mouvement vibratoire.

Liouville (J.). — *Nouveau théorème concernant la fonction numérique* $F(k)$. (3 p.)

On sait que $F(k)$ désigne, dans les études de M. Liouville, le

(*) *Mémoires de l'Académie des Sciences*, t. VIII.

(**) *Exercices de Mathématiques*; 1828.

(***) Kirchhoff, *Journal de Crelle*, t. XL.

nombre des formes quadratiques binaires, primitives ou non, de déterminant $-k$, dont un au moins des coefficients extrêmes est impair.

Cela posé, considérons toutes les valeurs de t telles que

$$10m - 25t^2 > 0$$

on aura

$$F(10m) + 2\Sigma F(10m - 25t^2) = 2\zeta_1(m).$$

$\zeta_1(m)$ désigne la somme des diviseurs de m.

Liouville (J.). — *Remarque au sujet de la fonction $\zeta_1(n)$ qui exprime la somme des diviseurs de m.* (2 p.)

Boussinesq (J.). — *Étude sur les surfaces isothermes et sur les courants de chaleur dans les milieux homogènes chauffés en un de leurs points.* (34 p.)

Liouville (J.). — *Extrait d'une lettre adressée à M. Besge.* (4 p.)

M. Liouville déduit de l'intégrale définie

$$\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2,$$

donnée par M. Bertrand, l'intégrale suivante

$$\int_0^1 \frac{\text{arc tang}\,x}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2.$$

La lettre se termine par des théorèmes relatifs aux formes quadratiques.

Liouville (J.). — *Théorème concernant la fonction numérique $\rho_2(n)$.* (3 p.)

Si l'on a $n = d\delta$, voici la définition de la fonction $\rho_2(n)$:

$$\rho_2(n) = \Sigma(-1)^{\frac{\delta-1}{2}} d^2$$

Weiler (A.). — *Note sur le problème des trois corps.* (16 p.)

Saint-Venant (de). — *Rapport à l'Académie des Sciences sur une Communication de M. Vallès, faite le* 21 *décembre* 1868 *sous ce titre :* « Expériences faites à l'écluse de l'Aubois pour déterminer l'effet utile de l'appareil à l'aide duquel M. *de Caligny* diminue dans une

proportion considérable la consommation d'eau dans les canaux de navigation ». (11 p.)

Caligny (A. de). — *Note sur les moyens de rendre automatique le système d'écluses de navigation décrit, tome XI, 2e série, page 145.* (7 p.)

Caligny (A. de). — *Note sur un appareil à faire des épuisements au moyen des vagues de la mer.* (6 p.)

Liouville (J.). — *Sur la forme ternaire* $x^2 + 2y^2 + 3z^2$. (2 p.)

Soit m un entier de la forme $6m \pm 1$, le nombre des solutions de l'équation

$$m = x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

est donné par la formule

$$N = F(6m).$$

Boileau (P.). — *Mémoire sur les bases de la théorie du régime uniforme des courants liquides.* (16 p.)

Mathieu (E.). — *Mémoire sur l'équation aux différences partielles du quatrième ordre* $\Delta\Delta u = 0$ *et sur l'équilibre d'élasticité d'un corps solide.* (45 p.)

On sait que les géomètres ont fondé sur l'étude de l'équation

$$\Delta u = \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} = 0,$$

une des plus admirables et des plus fécondes théories des mathématiques modernes. L'équation plus compliquée $\Delta\Delta u = 0$ n'avait peut-être pas encore été considérée d'une manière générale, et, cependant, elle se rencontre dans plusieurs théories importantes de la Physique mathématique. M. Mathieu l'étudie en employant une formule analogue à la célèbre équation de Green, et il arrive au théorème suivant :

« Il existe une fonction, et une seule, qui satisfait à l'équation

$$\Delta\Delta u = 0$$

dans l'intérieur d'une surface σ, qui y varie d'une manière continue avec ses dérivées des trois premiers ordres, et dont la valeur et celle de son Δ sont données à la surface. »

Le Mémoire se termine par différentes applications.

Caligny (A. de). — *Note sur des appareils hydrauliques fonctionnant au moyen de l'aspiration résultant du mouvement acquis d'une colonne liquide : addition à un Mémoire publié dans le tome XI de ce Journal en* 1866, *p*. 283. (3 p.)

Gournerie (de la). — *Note sur les singularités élevées des courbes planes.* (10 p.)

« Dans un Mémoire inséré au VIIe volume du *Quarterly Journal*, M. Cayley a établi que toute singularité d'une courbe plane est *équivalente* à des nombres déterminés de points doubles, de rebroussements, de tangentes doubles et d'inflexions, de telle sorte que lorsque ces quatre nombres sont connus pour toutes les singularités d'une courbe, on peut immédiatement appliquer à cette courbe les trois équations de Plücker, et aussi savoir à quel genre elle appartient d'après sa déficience (*deficiency*), c'est-à-dire d'après la différence qui existe entre les deux nombres de points doubles que son ordre comporte et qu'elle possède réellement. M. Cayley a, de plus, donné des formules pour calculer les quatre nombres qui représentent une singularité, lorsqu'on connaît, pour les différentes branches qui la constituent, des équations distinctes résolues par rapport à l'une des coordonnées. Je me propose de montrer comment on peut déduire ces équations de l'équation générale de la courbe.

» Je donnerai ensuite quelques résultats sur les rayons de courbure à un point multiple, et sur les contacts que les différentes branches peuvent avoir les unes avec les autres.

» Cette Note est composée de deux Parties ; la seconde, entièrement consacrée à des applications, a été, faute de place, rejetée au numéro de janvier du volume suivant. »

Caligny (A de). — *Note sur un appareil propre à élever l'eau au moyen des vagues de la mer ou des grands lacs.* (2 p.)

BULLETTINO di Bibliografia e di Storia delle Scienze matematiche e fisiche, pubblicato da B. Boncompagni. — Roma, tipografia delle Scienze matematiche et fisiche ; Via Lata, n° 211 (*).

(*) Fondé en 1868, paraissant chaque mois par fascicules de 6 à 7 feuilles in-4° ; en italien et en français. Prix : 35 centimes la feuille.

T. II, janvier-septembre; 1869.

Boncompagni (B.). — *La vie et les travaux du baron Cauchy, membre de l'Académie des Sciences; par C.-A. Valson, professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.*

Analyse détaillée de l'Ouvrage de M. Valson, suivie d'une Indication des écrits d'Augustin Cauchy, contenus dans huit Recueils scientifiques; par E. Narducci. (102 p.; ital.)

Narducci (E.) — *Sur la vie et les écrits de François Woepcke.* (34 p.; ital.)

Boncompagni (B.). — *Sur l'Ouvrage d'Albirouni sur l'Inde.* (54 p., ital.)

Ianichefsky (E.). — *Notice historique sur la vie et les travaux de Nicolas Ivanovitch Lobatchefsky. Discours prononcé dans la séance solennelle de l'Université de Kazan, le $\frac{5}{17}$ novembre* 1848. (Traduit du russe, par A. Potocki.) (40 p.; fr.)

Roy (A. le). — *Notice sur la vie et les travaux de J.-B. Brasseur.* (10 p.; fr.)

Jacoli (F.). — *Anecdote inédite relative à Bonaventure Cavalieri.* (14 p.; ital.)

Wolf (R.). — *Matériaux divers pour l'histoire des Mathématiques.* (30 p., 1 pl.; fr.)

Sur l'invention du niveau à bulle d'air. Mort de G.-G. Strauch. Correspondance littéraire de Bernoulli. Nicolas Fatio de Duillier. Marc-Michel Bousquet. Cosimo Bartoli.

Sédillot (L.-Am.). — *Les professeurs de Mathématiques et de Physique générale au Collége de France.* 1re *et* 2e *Période* (1530-1589). (58 p.; fr.)

ABHANDLUNGEN der königlichen böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. 6te Reihe, Bd. I; 1867. — Prag. In Commission der J. G. Calve'schen k. k. Universitäts-Buchhandlung (*).

(*) *Mémoires de la Société royale des Sciences de Bohème.* Prague, librairie universitaire de Calve. Paraît par volumes in-4° tous les deux ans, en allemand et en bohème.

Schmidt (G.). — *Sur les constantes physiques de la vapeur d'eau.* (50 p.; all.)

Ces constantes sont la densité relative, les deux capacités calorifiques de la vapeur fortement surchauffée et les constantes de la formule de M. Regnault pour la chaleur totale λ, qu'il faut communiquer à l'unité de poids de l'eau à partir de zéro pour l'amener à la température t, et la réduire en vapeur sous la pression de p kilogrammes par mètre carré. L'auteur examine, au point de vue théorique, les résultats obtenus par Zeuner et par Hirn.

ARCHIV der Mathematik und Physik mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten. — Herausgegeben von Johann August Grunert, Professor zu Greifswald (*). T. L; 1869.

Nawrath. — *Sur la construction d'un polygone simple, à la fois inscrit et circonscrit à un polygone de même espèce.* (10 p.; all.)

Bretschneider (C.-A.). — *Le théorème de Matthew Stewart.* (9 p.; all.)

Soit D un point de la base BC d'un Δ ABC, $AD = t$, $BD = a'$, $CD = a''$; a, b, c les trois côtés du Δ. On a $at^2 = b^2 a' + c^2 a'' - a a' a''$. Ce théorème de Géométrie élémentaire est très-utile et n'est pas encore assez connu.

Kudelka (Jos.). — *Les lois de la réfraction de la lumière.* (3 art., 111 p.; all.)

Björling Jr. (C.-F.-E.) — *Sur le mouvement rectiligne d'une molécule soumise à une force attractive ou répulsive, qui est une fonction algébrique, rationnelle et entière de la distance à un centre fixe.* (13 p.; fr.)

Grunert (J.-A.) — *Sur les cordes communes des sections coniques et de leurs cercles de courbure, et en particulier sur les maxima et les minima de ces cordes.* (34 p.; all.)

Versluys (J.). — *Applications nouvelles des déterminants à l'Algèbre et à la Géométrie.* (19 p.; fr.)

(*) Fondé en 1841. Prix : 3 Thlr. pour chaque volume composé de quatre cahiers gr. in-8°. Il paraît un ou deux volumes par an, en allemand, en français et en latin. Greifswald, C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung, Th. Kunike.

Le principal théorème contenu dans ce travail se rapporte à l'équation homogène d'une surface du second degré en coordonnées tétraédriques ; suivant que le discriminant de cette équation est négatif ou positif, la surface admet ou n'admet pas de génératrices rectilignes.

Grunert (J.-A.). — *Sur les projections conformes des cartes géographiques.* (34 p. ; all.)

Grunert (J.-A.). — *Sur le centre de gravité du trapèze et, en particulier, sur sa détermination graphique.* (7 p. ; all.)

Lindman (Chr.-Fr.). — *Remarques sur quelques séries.* (4 p. ; lat.)

Grunert (J.-A.). — *Sur une lettre remarquable, écrite par Lagrange, âgé de dix-huit ans, au comte G.-C. da Fagnano.* (9 p. ; all.)

Seeling (P.). — *Diverses propositions de la théorie des nombres.* (5 p. ; all.)

Imschenetsky (V.-G.). — *Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre* (*). (198 p. ; fr.)

Ce Mémoire contient un exposé complet et très-intéressant des travaux de Jacobi, de Bour, de Boole, de M. Bertrand et de M. Liouville sur cette branche importante de l'Analyse.

Nous reproduisons d'ailleurs une partie de l'Introduction :

« La théorie de l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre de la forme la plus générale, créée par les travaux des plus grands géomètres des temps modernes, forme actuellement la partie la plus approfondie et la plus achevée du calcul intégral. Dans l'histoire du développement de cette théorie, on rencontre ce fait remarquable, que les successeurs immédiats de Lagrange, son véritable fondateur (1772), considérèrent comme impossible de suivre la voie qu'il avait tracée ; tandis qu'au contraire les derniers progrès de cette théorie l'ont ramenée de nouveau aux principes de Lagrange. Pfaff, le premier, se plaçant à un nouveau point de vue, est parvenu à la solution complète du problème. Mais sa méthode, théoriquement exacte, s'est trouvée peu commode dans la pratique, par suite des difficultés que présente l'intégration successive de plusieurs systèmes d'équations différentielles. Cauchy (1819) et Jacobi (1837), par

(*) Traduit du russe par J. Hoüel. Un tirage à part a été fait de ce Mémoire et a déjà été signalé dans notre précédent numéro.

des procédés différents, et sans que le second eût aucune connaissance des travaux du premier, montrèrent que le but auquel conduisait la méthode de Pfaff pouvait être atteint plus simplement par la seule intégration complète du premier des systèmes d'équations différentielles qui se rencontrent dans cette méthode. La question paraissait dès lors complétement épuisée. Néanmoins, l'infatigable et fécond génie de Jacobi n'abandonna pas ses investigations sur ce problème auquel il avait déjà fait faire de si grands pas, et auquel s'attachait un nouvel intérêt depuis que les recherches d'Hamilton avaient mis en évidence la liaison qui existe entre cette théorie et l'intégration des équations différentielles de la Dynamique. Pendant que Jacobi se livrait à ses nouvelles études sur cette double question, la théorie continuait ses progrès, grâce aux remarquables publications d'autres analystes, Liouville, Bertrand, Donkin, Bour, etc., qui se sont occupés du même objet, et dont les découvertes devaient laisser moins à faire au géomètre allemand, quoique souvent aussi elles dussent coïncider avec les résultats qu'il obtenait de son côté. Nous ne pouvons émettre ici que de simples conjectures, puisque le travail de Jacobi n'a paru qu'après sa mort, rédigé par Clebsch d'après les matériaux trouvés dans ses papiers.

» Ces détails expliquent les réclamations de priorité auxquelles cette publication a donné lieu de la part de plusieurs auteurs, relativement soit aux théorèmes fondamentaux de la *nouvelle méthode* de Jacobi, soit à son principe général. Mais, sans aucun doute, le nom de ce grand géomètre restera attaché à cette théorie, fondée sur ses conceptions et constituée par lui-même sous une forme systématique complète, lors même que des parties isolées et secondaires de cet ensemble appartiendraient à d'autres inventeurs.

» En me bornant, pour le moment, à cette courte esquisse du développement successif de ce problème, je me réserve de revenir plus longuement sur les détails historiques dans les notes qui accompagnent le texte, et je vais donner maintenant un aperçu général du contenu de ce Mémoire.

» Dans le Chapitre I, j'examine les différentes formes d'intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre; et, de l'intégrale complète, je déduis l'intégrale générale, par la méthode de la variation des constantes arbitraires, en me fondant sur les propriétés des déterminants fonctionnels.

» Dans le Chapitre II, je considère la forme particulière d'intégrale qui conduit à des équations linéaires par rapport aux dérivées partielles, et je donne un abrégé de la théorie de ces dernières, d'après Lagrange et Jacobi.

» Dans le Chapitre III, j'expose l'état général de la question, conformément aux vues indiquées dans le dernier travail de Jacobi, et j'y introduis les conditions d'intégrabilité de Liouville et de Donkin. Après avoir montré que, dans le cas particulier de deux variables indépendantes, la méthode de Jacobi revient identiquement à celle de Lagrange et de Charpit, je reprends la question générale, et j'effectue une première simplification des équations, par l'élimination de la fonction inconnue, en tant qu'elle y entrait explicitement; je signale, en outre, le défaut du procédé employé par Jacobi.

» On voit, par le contenu des Chapitres précédents, que l'objet principal de mon étude est la nouvelle méthode de Jacobi. Après l'avoir exposée, j'ai fait remarquer, d'accord avec l'opinion exprimée par Bour dans un Mémoire imprimé, et par Bertrand dans ses leçons publiques, que Jacobi n'a pas donné à la construction de sa théorie toute la simplicité possible. En suivant les indications de ces deux géomètres, conformes aux résultats de mes propres recherches, j'ai essayé, dans le Chapitre IV, d'établir le théorème fondamental de la méthode de Jacobi sur les principes les plus simples.

» Dans le Chapitre V, j'expose avec détail la marche des intégrations qu'exige la méthode de Jacobi. D'abord, pour présenter le procédé fondamental sous la forme la plus simple, je n'ai pas réduit, dans les équations, les variables à leur nombre minimum; en outre, j'ai indiqué les difficultés qui pouvaient se rencontrer, et j'ai examiné des cas où le procédé s'applique très-simplement. Enfin, par l'élimination des variables superflues, j'ai établi la théorie de la méthode dans tout son développement, et j'ai donné des exemples pour bien faire comprendre la marche du calcul.

» Le Chapitre VI est consacré à l'intégration des équations simultanées aux dérivées partielles du premier ordre. Après avoir montré que la solution de cette question plus générale peut se faire par les procédés qui ont servi à résoudre le problème traité dans les Chapitres précédents, j'applique cette théorie à des problèmes déterminés et indéterminés aux dérivées partielles du premier ordre conduisant à l'intégration d'équations simultanées linéaires ou non

linéaires. Pour terminer, je considère à un nouveau point de vue la question générale, intéressante d'ailleurs par elle-même, des conditions d'intégrabilité immédiate d'une expression aux différentielles ordinaires d'ordre quelconque.

» Dans le Chapitre VII, j'expose la théorie de l'intégration des équations simultanées aux différentielles ordinaires de la forme canonique; j'explique la liaison qui existe entre le théorème de Poisson relatif aux intégrales de ces équations et le théorème fondamental de la méthode de Jacobi, et je démontre le procédé de Bertrand pour l'intégration des équations de la dynamique au moyen du théorème de Poisson; j'applique à un même exemple les deux théories.

» Enfin, dans le Chapitre VIII, pour compléter l'aperçu des méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, j'ai pensé qu'il ne serait pas inutile d'ajouter un exposé général de la méthode de Cauchy. »

M. Imschenetsky a fait une autre étude aussi consciencieuse que celle dont nous venons de citer l'Introduction, et relative aux équations du second ordre. Nous en parlerons prochainement.

Bretschneider (C.-A.). — *Les courbes polaires harmoniques.* (24 p.; all.)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Mayr (A.). — Construction der Differentialgleichungen aus partikularen Integralen. Gr. in-8, Würzburg, Kellner. 1 Thlr. 24 Ngr.

Oppolzer (Th.). — Lehrbuch der Bahnbestimmung der Kometen und Planeten. 1 Bd. Lex-8. Leipzig, Engelmann. $4\frac{2}{3}$ Thlr.

Padova (E.). — Sul moto di un elissoide fluido ed omogeneo. Tesi per l'esame di abilitazione all' insegnamento, presentata alla regia Scuola Normale superiore di Pisa. In-8, 87 p. Pisa, tip. Nistri. 2 l. 50.

Piazzi (G.). — Sulle scoperte di Herschel. Lettere edite per cura di B.-E. Maineri. In-16, 32 p. Milano, tip. Pirola.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

VALSON (C.-A.), professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble. — La vie et les travaux du baron Cauchy, membre de l'Académie des Sciences; avec une Préface de M. Hermite, membre de l'Académie des Sciences. — 2 vol. in-8; 1868. Paris, Gauthiers-Villars. Prix : 8 francs.

Le premier volume de M. Valson raconte, avec de minutieux détails, la vie de l'illustre géomètre, considéré comme chrétien fervent plus encore que comme savant. Nous nous proposons ici de rendre compte du second, spécialement consacré à l'œuvre scientifique de Cauchy. En présence de sept cent quatre-vingt-neuf Mémoires relatifs aux théories les plus diverses incessamment abordées, abandonnées et reprises, M. Valson a renoncé à la tâche de tout analyser, même sommairement, mais il a tout énuméré et tout classé ; nous ne pouvons avoir la prétention d'en faire autant, et nous nous bornerons à signaler les traits principaux de l'OEuvre dont l'importance, qui grandit chaque jour, assure à Cauchy l'un des plus grands noms que puisse citer l'histoire des Mathématiques.

Augustin-Louis Cauchy, né à Paris, le 21 août 1789, entra à l'École Polytechnique à l'âge de seize ans. Quatre ans plus tard, en 1811, il débutait avec éclat dans la science par la solution aussi simple qu'élégante d'une question proposée par Poinsot. Tout en rendant justice au consciencieux et utile travail de M. Valson, je dois signaler l'absence regrettable du nom de l'illustre géomètre dans l'analyse de ce premier Mémoire, aussi bien que dans le récit des circonstances qui s'y rapportent. Poinsot et Cauchy ne s'aimaient pas; leurs contemporains ne l'ont pas ignoré. Candidats tous deux à la succession de Lagrange dans la Section de Géométrie, ils étaient dignes l'un et l'autre d'un tel héritage. Ampère, dont le nom est resté tout au moins l'égal de celui de Cauchy, était au nombre des concurrents, et l'échec du jeune géomètre, âgé alors de vingt-quatre ans, n'autorisait nullement son trop enthousiaste biographe à écrire : « S'il ne fut pas nommé, c'est qu'au scrutin des considérations d'un autre ordre furent mises en balance avec le mérite. » La question ne vaut pas qu'on l'étudie; mais, en se reportant en 1813, pour comparer les travaux publiés par Cauchy à ceux de Poinsot et d'Ampère, âgés, l'un

de trente-quatre ans, l'autre de trente-huit, il semble qu'un jugement équitable pouvait alors les préférer tous deux à leur jeune et brillant concurrent.

La Section, il est vrai, plaçait au premier rang un quatrième candidat; mais à quoi bon le rappeler? L'histoire des méprises académiques est un lieu commun inépuisable qui n'étonne plus maintenant et n'instruit personne. Quoi qu'il en soit, je ne rattache nullement à l'avantage obtenu par Poinsot l'inexplicable absence de son nom dans le livre de M. Valson. Poinsot avait fait en Géométrie une découverte véritable, celle de quatre nouveaux polyèdres réguliers; il s'était demandé s'il en existe d'autres, et le Mémoire présenté par Cauchy à la première Classe de l'Institut était la réponse à cette question.

« Le Mémoire que j'ai l'honneur de soumettre à la Classe, disait le jeune auteur, contient diverses recherches sur la Géométrie des solides; la première partie offre la solution de la question proposée par M. Poinsot sur le nombre des polyèdres réguliers que l'on peut construire. »

Le doute n'est donc pas possible, et l'histoire de la question n'exigeait aucune érudition.

Cauchy, dans son premier Mémoire, montrait d'éminentes qualités devenues chez lui de plus en plus rares. La forme est aussi excellente que le fond, et la rigueur des raisonnements semble s'allier sans effort à la plus lumineuse clarté. Les deux Mémoires de 1811 et de 1812, sur la théorie des polyèdres et les premières études sur le nombre des valeurs d'une fonction montrent que Cauchy, en arrêtant plus longtemps son esprit sur chacune de ses découvertes, aurait pu, s'il l'eût voulu, leur imprimer ce cachet de perfection définitive que, trop souvent depuis, il n'a pas eu le loisir de chercher. C'est par sa grande hâte de produire que Cauchy a été si loin de mériter l'éloge que lui décerne cependant M. Valson :

« Il ne quittait pas un sujet avant de l'avoir complétement approfondi et élucidé, de manière à satisfaire les exigences des esprits les plus difficiles. »

S'il est un nom illustre dans l'histoire de la science, auquel cette louange ne soit pas applicable, c'est, sans contredit, celui de Cauchy, et, lorsque l'on peut louer en lui tant de rares et exceptionnels mérites, c'est un tort véritable envers sa mémoire de citer précisé-

ment celui qui, de l'aveu de tous et évidemment par sa faute, lui a complétement fait défaut.

La théorie des intégrales doubles, et leur application à la recherche des intégrales définies, fut pour Cauchy l'occasion d'un succès plus brillant encore, et, pour les géomètres les plus illustres, l'objet d'un véritable étonnement.

Une intégrale simple ou double est la limite d'une somme d'éléments infiniment petits, et les géomètres jusqu'alors, si l'on en excepte l'illustre Gauss, admettaient que, sans en changer la valeur, on peut intervertir les opérations et ajouter les mêmes éléments dans un autre ordre.

Il faut exclure le cas où certains éléments deviennent infinis. Gauss, dans un beau Mémoire, avait remarqué que, réciproquement, quand l'ordre des intégrations change la valeur d'une intégrale double, l'élément intégré devient nécessairement infini. Cauchy, conduit par ses propres recherches au même résultat, en a su déduire des conséquences plus importantes et plus précises. Non content d'affirmer que l'ordre des intégrations peut influer sur la valeur d'une intégrale, il calcule dans un cas étendu la différence des deux résultats, et, par un de ces artifices élégants qui, chez lui, semblent naturels, en déduit, pour le calcul des intégrales définies, la méthode la plus ingénieuse et la plus féconde qui eût été donnée jusque-là.

Legendre s'est montré strictement et un peu sèchement juste lorsque, en rendant compte de ce beau Mémoire, il écrivit :

« Nous n'examinons pas si les nouvelles méthodes de M. Cauchy sont plus simples que celles qui étaient déjà connues, si leur application est plus facile, et si l'on peut trouver par leur moyen quelque résultat que ne pourraient donner les méthodes connues ; car, quand même on répondrait négativement à ces questions, il n'en resterait pas moins à l'auteur le mérite :

» 1° D'avoir construit, par une marche uniforme, une suite de formules propres à transformer les intégrales définies et à en faciliter la détermination ;

» 2° D'avoir remarqué le premier qu'une intégrale double prise entre des limites données pour chaque variable n'offre pas toujours le même résultat dans les deux manières d'effectuer les intégrations ;

» 3° D'avoir déterminé la cause de cette différence et d'en avoir donné la mesure exacte au moyen des intégrales singulières, dont

l'idée appartient à l'auteur et qui peuvent être regardées comme une découverte en Analyse;

» 4° Enfin d'avoir donné par ses méthodes de nouvelles formules intégrales fort remarquables, qui peuvent bien se déduire des formules connues, mais auxquelles personne n'était encore parvenu.

» Il nous paraît, par tous ces motifs, que M. Cauchy a donné, dans ses recherches sur les intégrales définies, une nouvelle preuve de la sagacité qu'il a montrée dans plusieurs de ses autres productions. »

Legendre aurait pu, sans exagération, hausser de plusieurs tons la note de ses louanges. En signalant une erreur commise jusque-là par les maîtres de la science, Cauchy avait fait preuve de sagacité; mais, en cherchant et trouvant l'expression précise de l'erreur, en poussant à bout les conséquences de cette remarque, en se rendant maître d'un sujet aussi délicat sans en restreindre la généralité, en y rattachant enfin tant de conséquences éloignées et imprévues, il prenait rang, à l'âge de vingt-trois ans, parmi les géomètres inventifs de son époque. Les Commissaires de l'Académie auraient pu le proclamer plus nettement.

L'idée absolument nouvelle contenue dans le Mémoire sur les intégrales doubles devait être mise dans tout son jour par les écrits ultérieurs de l'illustre analyste; elle forme, pour ainsi dire, le motif dominant et le ressort aussi simple que précieux de ses plus admirables découvertes.

En étudiant les intégrales doubles, Cauchy avait aperçu le rôle considérable des valeurs infinies d'une fonction. La suite des mêmes idées appliquées à la recherche des intégrales imaginaires devait bientôt après lui fournir la remarque la plus importante peut-être aux progrès de la science analytique. La définition d'une intégrale prise entre des limites imaginaires, sa valeur indépendante de la route suivant laquelle on intègre, son changement brusque lorsque cette route franchit certains points pour lesquels la fonction devient infinie ou mal déterminée, les conséquences relatives au calcul des intégrales définies, aux racines des équations, au développement en séries et à la périodicité des intégrales, forment une longue chaîne de vérités nouvelles que l'on ne saurait trop admirer, et dont il faut renoncer à louer dignement la découverte; aucun géomètre, à aucune époque, n'a fait faire à l'Analyse pure un progrès plus considérable.

Cette grande théorie n'est pas née tout d'un coup : qui pourrait

s'en étonner? Elle s'est lentement ordonnée et développée dans l'esprit de l'illustre inventeur, et je reproche à M. Valson de n'en pas avoir suffisamment marqué les phases et signalé le progrès. Les premiers Mémoires contiennent des imperfections et des inexactitudes, corrigées plus tard par Cauchy lui-même. Les fonctions imaginaires n'y sont pas distinctement définies, et l'intervention de leurs valeurs multiples semble n'y jouer aucun rôle. Sans rien enlever à la gloire de Cauchy, cela importe au lecteur, que l'admiration uniforme de M. Valson ne saurait guider. J'ajouterai que les indications du savant auteur sont parfois entachées de graves inexactitudes et de singulières inadvertances. La définitition du *résidu*, ce fondement de tant de travaux de Cauchy, n'est pas exacte. Quand une fonction $f(x)$ devient infinie pour la valeur $x = a$, a est racine de l'équation $\frac{1}{f(x)} = 0$, et. si le degré de multiplicité de cette racine est m, le produit $(x-a)^m f(x)$ a pour $x = a$ une valeur finie. En la nommant C on peut, pour les valeurs de x voisines de a, assimiler la fonction $f(x)$ à $\frac{C}{(x-a)^m}$; l'erreur commise sera infiniment petite par rapport à la grandeur évaluée; mais cette substitution, qui semble si naturelle, est absolument inféconde; Cauchy a donné, en s'en apercevant, une grande preuve de pénétration, et le *résidu*, qui joue un si grand rôle, n'est pas, comme le dit M. Valson, la valeur de la constante C. Le calcul des résidus, créé en apparence pour donner plus d'élégance et de simplicité aux résultats relatifs à la théorie des intégrales définies, s'applique avec grand avantage à toutes les parties de la science; Cauchy l'a introduit très-utilement dans l'étude des équations différentielles. Le rôle de Cauchy dans cette partie de la science, comme dans presque toutes ses branches d'ailleurs, est considérable. La théorie, si complétement étudiée avant lui, des équations linéaires à coefficients constants lui doit une forme nouvelle, dans laquelle le cas particulier où les racines de l'équation caractéristique deviennent égales est compris dans les mêmes formules que le cas général. J'attache, je l'avouerai, moins de prix que M. Valson à l'idée d'introduire dans les intégrales, pour remplacer les constantes arbitraires, les valeurs initiales de la fonction inconnue et de ses dérivées. Si l'on veut, en effet, pousser les calculs jusqu'au bout, les opérations exigées par les diverses formules sont non-seulement équivalentes, mais identiques :

c'est par l'élégance seule de la forme que l'emportent les formules de Cauchy, et c'est le seul progrès en effet dont parût susceptible la solution d'un problème si bien étudié par ses devanciers.

Cauchy a étudié, à plusieurs reprises, des équations linéaires aux dérivées partielles à coefficients constants, et ses formules, remarquables par leur élégance et leur généralité, ont été pour lui l'occasion de ces transformations ingénieuses et imprévues dont il avait le secret. Le *Journal de l'École Polytechnique* contient un beau Mémoire de lui sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles. En le mentionnant avec les louanges qu'il mérite, pourquoi ne pas rappeler le nom de Fourier, qui a découvert la formule sur laquelle il repose, et celui de Poisson, qui, dans un cas particulier, avait trouvé longtemps avant Cauchy le plus remarquable des résultats qui s'en déduisent?

Dans la théorie des équations aux dérivées partielles non linéaires du premier ordre, la part de Cauchy est considérable, et l'un des progrès les plus importants lui est dû incontestablement. Mais Hamilton, à son tour, l'a devancé en lui inspirant de nouvelles recherches, dans lesquelles il a été moins heureux que Jacobi. De telles rencontres n'enlèvent rien à la gloire de Cauchy, mais il importe de les signaler, et, pour justifier entièrement son titre, une étude complète sur les travaux de Cauchy devrait être, à bien peu de chose près, l'histoire du progrès des Sciences mathématiques pendant quarante ans. M. Valson, dont le but paraît être de louer Cauchy plus encore que de le juger, pouvait, en élargissant sa tâche, lui décerner l'hommage le plus précieux et le plus juste à la fois. Poinsot et Poisson, Jacobi et Abel, Gauss et Dirichlet, ont été, comme Cauchy, les chefs et les modèles des géomètres contemporains, et leurs noms auraient pu briller à côté du sien sans que les avantages de détail obtenus souvent par chacun d'eux laissassent dans l'esprit du lecteur une impression d'infériorité. Le génie de Cauchy est digne de tous nos respects; mais pourquoi s'abstenir de rappeler que la trop grande abondance de ses travaux, en diminuant souvent leur précision, en a plus d'une fois caché la force? La dangereuse facilité d'une publicité immédiate a été pour Cauchy une tentation irrésistible et souvent un écueil. Son esprit, toujours en mouvement, apportait chaque semaine à l'Académie ses travaux à peine ébauchés, des projets de Mémoire et des tentatives parfois infructueuses, et, lors même qu'une brillante

découverte devait couronner ses efforts, il forçait le lecteur à le suivre dans les voies souvent stériles essayées et abandonnées tour à tour sans que rien vînt l'en avertir. Prenons pour exemple la théorie des substitutions et du nombre de valeurs d'une fonction. A qui doit-elle ses plus grands progrès? A Cauchy sans aucun doute, et il est véritable que son nom, dans l'histoire de cette belle question, s'élève à une grande hauteur au-dessus de tous les autres. Mais, sur cette théorie qui lui doit tant, Cauchy a composé plus de vingt Mémoires. Deux d'entre eux sont des chefs-d'œuvre. Que dire des dix-huit autres? rien, sinon que l'auteur y cherche une voie nouvelle, la suit quelque temps, entrevoit la lumière, s'efforce inutilement de l'atteindre et quitte enfin, sans marquer aucun embarras, les avenues de l'édifice qu'il renonce à construire.

Les efforts des plus grands géomètres pour démontrer les théorèmes laissés par Fermat comme autant d'énigmes à la postérité mériteraient peut-être un exact historien. Dans cette lice glorieuse où sont descendus tour à tour Euler et Lagrange, Gauss et Dirichlet, Legendre et Kummer, M. Lamé enfin, dont les efforts ont été dignement jugés par Cauchy, on pourrait sans injustice accorder la palme à l'auteur des *Exercices de Mathématiques*, et la preuve du théorème sur les nombres polygones était peut-être la plus difficile à découvrir. Mais est-il possible de cacher qu'en revenant, à bien des reprises, sur un autre théorème de Fermat, il en a remué les difficultés sans en avoir résolu une seule? Les habitués de l'Académie des Sciences n'ont pas oublié avec quelle ardeur, pendant plusieurs semaines, Cauchy, préoccupé de cette question et toujours plein d'espoir, apportait à chaque séance des principes nouveaux entrevus la veille et dont il n'avait pu encore pénétrer toutes les suites. Combien de fois, dans son empressement, l'ont-ils vu déposer sur le bureau le titre d'un Mémoire inachevé qu'il envoyait à l'imprimerie à la dernière heure, en achetant la chance d'antidater de quelques jours une découverte importante par la certitude d'attacher son grand nom à un travail hâtif et imparfait? De tels souvenirs sont caractéristiques; ils ne prouvent nullement qu'inférieur à lui-même Cauchy fût quelquefois abandonné de sa rare perspicacité : l'appréciation serait très-injuste. Cauchy, pendant toute sa carrière, a conservé, avec la rapidité de la pensée, la même puissance d'invention et de pénétration. Son génie toujours prêt le rendait maître en peu d'instants

des plus difficiles problèmes. Mais toute recherche exige des tâtonnements et des essais infructueux, que Lagrange, Jacobi et Gauss ont connus sans aucun doute tout autant que lui. Ce qui distingue Cauchy, dont le génie a égalé le leur, c'est d'en avoir longuement et minutieusement informé le public.

Cauchy, en s'exerçant à bien des reprises sur la théorie de la lumière, a montré sous une forme nouvelle toutes les ressources de son esprit d'invention, et la théorie créée par Fresnel lui doit de véritables progrès; bien souvent, il ne faut nullement s'en étonner, sur de tels sujets on le voit, il est vrai, tâtonner, revenir sur ses assertions, et changer avec grand profit pour la science le principe de ses méthodes.

Cauchy, par exemple, affirmait, au début de ses recherches, que les vibrations de la lumière polarisée sont dans le plan même de polarisation, auquel peu de temps après il les suppose perpendiculaires, pour renoncer plus tard à cette hypothèse et revenir à sa première assertion, qui est celle de Fresnel. On retrouve les mêmes incertitudes et les mêmes variations relativement à la densité variable de l'éther dans les divers milieux, et, chaque fois qu'une opinion est adoptée, elle est présentée comme certaine et rigoureusement démontrée. Quoi qu'il en soit, les résultats énoncés par Cauchy sur la réflexion, la double réfraction et la polarisation des rayons réfléchis et transmis par un corps cristallisé d'une manière quelconque sont justement placés par les physiciens au nombre des lois les plus complexes et les plus nettes à la fois que leur fournisse l'analyse mathématique; susceptibles, par leur précision, d'être vérifiés expérimentalement, ils ont trouvé dans les belles recherches de M. Jamin une confirmation éclatante. De telles rencontres sont dignes d'admiration; il ne faut pas toutefois en exagérer la portée, et l'on doit, au point de vue mathématique, apporter de nombreuses restrictions à la rigueur des démonstrations. Cauchy, après avoir établi les équations différentielles du mouvement d'un système de molécules qu'il assimilait à l'éther, avait commencé par en chercher l'intégrale générale en assignant à la fonction inconnue la forme d'une intégrale définie quadruple. Les analystes seuls pouvaient apprécier, dans ce résultat qui devait renfermer implicitement la science entière, le mérite d'une grande difficulté vaincue. Mais c'est souvent ne rien voir que de tout voir à la fois : dans cette belle formule les lois physiques du phénomène restent tellement ca-

chées, qu'on ne peut, jusqu'ici, concevoir aucun espoir de les en dégager. Cauchy n'a pas tenté une si grande entreprise. Non-seulement l'intégrale générale, mais les équations différentielles du mouvement ne jouent aucun rôle dans ses recherches, où plus d'une hypothèse arbitrairement acceptée sépare les principes de leurs conséquences. Après avoir défini ce qu'il nomme un *mouvement simple,* Cauchy, par une conséquence naturelle, donne le nom de *rayon simple* à celui qui résulte d'un tel mouvement de l'éther. Il admet ensuite, comme l'avaient fait avant lui Mac Cullagh et Neumann, qu'un rayon simple tombant sur la surface qui sépare deux milieux peut donner naissance, dans le cas le plus général, à deux rayons réfléchis et à deux rayons réfractés, qui sont comme lui des rayons simples. Tout cela étant admis sans démonstration, Cauchy utilise habilement les conditions qui doivent être remplies à la surface pour déterminer les constantes et parvenir aux formules précises que l'expérience a heureusement confirmées, et qu'il applique à tous les rayons sans aucune restriction.

La Mécanique céleste ne pouvait manquer d'attirer l'attention de Cauchy, et il y a marqué glorieusement sa trace. La théorie des perturbations planétaires lui doit une ingénieuse méthode dont l'application très-facile et très-simple n'a pas moins frappé les géomètres par sa valeur propre que par les circonstances remarquables dans lesquelles elle s'est produite. M. Le Verrier avait présenté à l'Académie des Sciences un important Mémoire sur la théorie de la planète Pallas. Plus désireux d'obtenir des résultats exacts et complets que de perfectionner les méthodes, le savant astronome avait employé avec une patience sans égale toutes les ressources connues de la science, en utilisant avec autant de prudence que d'habileté les méthodes que la grande inclinaison de l'orbite rendait d'une application fort difficile. Le Mémoire fut renvoyé à Cauchy. Fallait-il, pour en vérifier les conclusions, recommencer d'aussi pénibles calculs ? L'Académie n'entendait pas évidemment imposer une telle tâche à son illustre rapporteur; Cauchy cependant, sans s'étonner de ces immenses calculs, voulut juger non-seulement la méthode, mais les résultats; la difficulté particulière du problème devint pour lui une ressource nouvelle, et, par la richesse toujours prête de ses inventions, il sut vérifier minutieusement l'exactitude des chiffres en marquant une fois de plus, par la promptitude du travail simplifié, son incontestable supériorité.

La science fut enrichie d'un Chapitre réellement nouveau, et la méthode de Cauchy, commentée depuis avec beaucoup de sagacité et de science par d'habiles et profonds géomètres, doit prendre rang parmi les théories classiques de la Mécanique céleste.

L'admiration de M. Valson pour l'illustre géomètre est absolue et sans réserve, et l'absence, peut-être volontaire, de toute critique, diminue à mes yeux, je l'avoue, le mérite considérable pourtant d'un travail où s'allie, à une science très-exacte, un esprit méthodique et soigneux. Cauchy, dit M. Valson, était un éminent professeur; la louange est méritée, mais, si l'on veut la développer, il ne faut pas, à l'exemple du savant auteur, énumérer, sans en omettre un seul, tous les mérites de méthode et de diction, qu'un maître plein de zèle puisse unir à la science la plus profonde, pour les attribuer sans distinction à Cauchy. L'illustre inventeur a grandement contribué par son enseignement à l'École Polytechnique aux progrès des hautes études mathématiques. Il a laissé dans la mémoire des élèves d'élite, tels que MM. Combes et de Senarmont, une juste et reconnaissante admiration. Il a formé au Collége de France des savants qui, devenus célèbres, se plaisaient à reporter vers lui la meilleure part de leurs succès et l'origine de leurs plus beaux travaux; il a permis enfin à l'Université de France, aussi longtemps que son nom a brillé sur les affiches de la Sorbonne, de l'opposer, sans accepter d'infériorité, aux noms de Gauss, de Jacobi et de Dirichlet, dont s'enorgueillissaient les Universités allemandes. Tout cela est strictement vrai, il est juste et bon de le dire; mais ces louanges s'adressent au savant éminent bien plus encore qu'au professeur habile, et, s'il m'est permis d'en juger par les leçons que j'ai entendues à une époque où l'illustre maître avait conservé toute la vigueur de son talent, l'enseignement de Cauchy, si précieux pour les vrais géomètres, n'était nullement fait pour instruire et surtout pour développer les esprits ordinaires. Lorsqu'en 1849, aux applaudissements de tous les amis de la science, Cauchy fut appelé à occuper à la Faculté des Sciences de Paris la chaire de Mécanique céleste, ses premières leçons, il faut l'avouer, trompèrent complétement l'espoir d'un auditoire d'élite plus surpris que charmé par la variété un peu confuse des sujets abordés. La troisième, il m'en souvient, fut presque entièrement consacrée à l'extraction de la racine carrée, et, le nombre 17 étant pris pour exemple, les calculs furent poussés jusqu'à la dixième décimale par des méthodes connues

de tous les auditeurs, et que Cauchy croyait nouvelles parce que la veille sans doute elles avaient spontanément traversé son esprit. Je ne revins plus et j'eus grand tort, car les leçons suivantes m'auraient initié dix ans plus tôt aux plus brillantes découvertes de l'illustre maître. Me contestera-t-on le droit d'ajouter que je n'aurais pas à exprimer un tel regret, si à ses éminentes qualités comme géomètre Cauchy avait ajouté le talent et l'art du professeur ?

M. Valson, dans l'un des Chapitres du premier volume, a assigné à Cauchy parmi les géomètres contemporains un rang tout singulier, qui ne souffre que pour le seul Gauss la possibilité d'une comparaison. C'est de quoi je ne saurais convenir; mais le parallèle de Cauchy et de Gauss serait intéressant. Si, sans craindre de commettre ces deux grandes renommées, j'osais un jour le tenter, je voudrais, par des études préalables, raviver dans mon esprit et préciser les souvenirs d'admiration qu'elles doivent réveiller l'une et l'autre.

Mais il ne faudrait pas, pour tous deux, procéder de même façon, et cela seul est une indication. Les écrits de Gauss sont classiques, les découvertes seules de Cauchy le deviennent peu à peu, et le temps, qui n'enlèvera rien à la gloire de l'un, doit, sans aucun doute, accroître celle de l'autre; ce n'est donc pas en relisant les ouvrages de Cauchy que je voudrais me préparer à le louer, c'est en repassant dans mon esprit les derniers progrès de la science, en y retrouvant dans plus d'une théorie renouvelée le souvenir et la marque de son génie, en contemplant son influence croissante sur d'éminents disciples, en songeant à la source féconde d'études et de recherches qu'il leur a léguée, que je m'efforcerais de comprendre l'importance de son rôle et de l'exprimer dignement. Pour accroître, au contraire, la juste admiration qu'éveille le seul nom de Gauss, il suffirait d'étudier, sans en passer une page, l'un quelconque de ses beaux Mémoires, si bien caractérisés par lui-même dans la courte, expressive et modeste devise : *Pauca sed matura*. La balance, cela n'est pas douteux, pencherait du côté de Gauss : c'est le sentiment unanime des géomètres. La comparaison, sur plus d'un point, tournerait cependant à l'avantage de son rival, et c'est une grande gloire pour Cauchy. Mais, lorsqu'en remontant la série des siècles pour découvrir un émule à l'illustre analyste français, M. Valson a intitulé le dernier Chapitre de son premier volume : *Parallèle de Cauchy et de Pascal*, il a préparé

à son lecteur une impression de surprise sans mélange, sur laquelle je ne veux pas insister.

J. BERTRAND.

Nous croyons faire plaisir à nos lecteurs en ajoutant à l'article si intéressant qu'on vient de lire, et qui est extrait du *Journal des Savants* (avril 1869), le tableau résumé des travaux d'Augustin Cauchy qu'on trouve dans le second volume de M. Valson, p. 16.

OUVRAGES DÉTACHÉS (*).

Cours d'Analyse de l'École royale Polytechnique. 1er Partie (seule publiée). *Analyse algébrique*; 1 vol. in-8°; 1821.

Résumé des Leçons données à l'École Polytechnique sur le Calcul infinitésimal; 1 vol. in-4°; 1823.

Leçons sur les applications du Calcul infinitésimal à la Géométrie; 2 vol. in-4°; 1826-1828.

Leçons sur le Calcul différentiel; 1 vol. in-4°; 1829.

Exercices de Mathématiques; 51 livraisons in-4°; 1826-1830.

Résumés analytiques; 5 livraisons in-4°; Turin, 1833.

Nouveaux Exercices de Mathématiques (Mémoire sur la dispersion de la lumière), 8 cahiers in-4°; Prague, 1835-1836.

Exercices d'Analyse et de Physique mathématique; 4 vol. in-4°; 1840-1847.

MÉMOIRES.

Sept cent quatre-vingt-neuf Mémoires, Rapports, Notes, etc., répartis comme il suit :

Mémoires détachés.	18
Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.	549
Mémoires de l'Institut.	23
Mémoires des Savants étrangers.	3
Journal de l'École Polytechnique.	14
Annales de Gergonne.	4
Bulletin de Férussac.	15
Bulletin de la Société Philomathique.	15
Journal de M. Liouville.	7

. MÉMOIRES PUBLIÉS EN CORPS D'OUVRAGE.

Anciens *Exercices de Mathématiques*.	88
Nouveaux *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*. .	53
Total.	789

Si l'on classe les mêmes Mémoires par ordre de matière, sans tenir compte de ceux qui font double emploi comme se rapportant à la fois à plusieurs sujets

(*) Nous avons complété la liste donnée par M. Valson.

distincts, on obtient le résultat suivant :

Arithmétique, théorie des nombres	69
Géométrie	39
Analyse	72
Intégrales définies. — Résidus	81
Fonctions symétriques. — Substitutions	40
Séries	73
Théorie des équations	48
Fonctions périodiques inverses	39
Équations différentielles	84
Mécanique	113
Optique	102
Astronomie	72

Espérons que ces Mémoires, dont plusieurs sont devenus extrêmement rares, seront tous réimprimés, et que la France élèvera à Cauchy, une de ses gloires mathématiques, un monument digne de lui, en publiant la Collection complète de ses œuvres. Cauchy ne manque pas chez nous de disciples zélés, d'admirateurs dévoués. Plusieurs, peut-être, hésiteraient à diriger l'ensemble d'une publication aussi considérable. Aucun, nous en sommes convaincu, ne refusera ses soins et ses conseils pour la branche de la science dont il s'est plus particulièrement occupé à la suite de Cauchy. G. D.

HANKEL (Dr Hermann), ordentlicher professor der Mathematik. — Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen. *Ein Beitrag zur Feststellung des Begriffs der Function überhaupt.* Universitätsprogramm zum 6 Merz 1870. — In-4°, 51 S.; 1870. Tübingen, Druck von L. F. Fues (*).

Pour donner un aperçu du contenu de cet intéressant Mémoire, nous allons reproduire les principaux passages de l'*Introduction*.

Ce qui manquait surtout aux mathématiciens de l'antiquité, c'était l'idée de *variabilité*. S'ils étaient forcés de l'introduire un instant pour définir certaines courbes engendrées par le mouvement, ils s'empressaient d'abandonner les considérations cinématiques, dès qu'ils voulaient établir en toute rigueur les propriétés de ces courbes. C'est Descartes qui a ouvert le premier l'ère des Mathématiques mo-

(*) *Recherches sur les fonctions oscillantes et discontinues un nombre infini de fois. Étude pour contribuer à fixer la notion de fonction ;* par le Dr Hankel, professeur ordinaire de Mathématiques à l'Université de Tubingue.

dernes, en représentant par des courbes les valeurs variables des racines d'une équation entre deux grandeurs. Pour désigner une telle dépendance, Leibnitz et Jean Bernoulli adoptèrent la dénomination de *fonction*.

Pour Euler et les autres géomètres du XVIIIe siècle, *fonction* fut synonyme d'*expression analytique*, explicite ou implicite. On commença par considérer ces expressions comme déterminées au moyen des opérations algébriques (addition, multiplication, etc.), et les fonctions étaient dites *algébriques* ou *transcendantes*, suivant que le nombre des opérations était fini ou infini. On admettait la possibilité générale d'un tel développement des transcendantes, et on leur attribuait sans hésitation toutes les propriétés des fonctions algébriques indépendantes du nombre des opérations. On fut longtemps avant de remarquer que certaines expressions purement analytiques, telles que

$$\sin\frac{1}{x},\quad e^{\frac{1}{x}},\quad \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}},\quad \int_x^\infty \frac{dx}{1+e^{\frac{1}{x}}},$$

pour $x = 0$, présentent des singularités essentiellement différentes de celles qui se rencontrent dans les fonctions algébriques (*).

Lorsque des courbes tracées arbitrairement différaient par un caractère quelconque des courbes algébriques, on les appelait *curvæ discontinuæ, seu mixtæ, seu irregulares* (**), par opposition aux *curvæ continuæ*, déterminées par des équations, et l'on était convaincu de l'impossibilité de représenter les courbes discontinues par des équations analytiques. Lorsque, dans le problème des cordes vibrantes, on introduisit, comme fonction arbitraire, la dépendance entre l'abscisse et l'ordonnée de pareilles courbes, ce fut une première dérogation à la définition admise jusque-là de l'idée de fonction, et d'Alembert était en droit de soutenir que c'était « contre les règles de l'Analyse » (***). La polémique qui s'éleva à ce sujet entre d'Alembert, Euler, Daniel Bernoulli et Lagrange, a été admirablement résumée par Riemann, dans son Mémoire intitulé : *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*, § I (****).

(*) *Voyez* d'Alembert, *Histoire de l'Académie de Berlin pour l'année* 1747, p. 236.

(**) Euler, *Introductio in Analysin infinitorum*, t. II, p. 6.

(***) *Opuscules mathématiques*, t. I, p. 32.

(****) *Abhandlungen der Göttingischen Gesellschaft*, t. XIII, 1867.

La difficulté s'accrut encore bien davantage, lorsque, en traitant des fonctions bien définies *entre certaines limites seulement*, on fut amené à les considérer *en dehors* de ces limites, et à déterminer leurs valeurs correspondantes à toutes les valeurs de la variable. Le premier exemple de ce cas embarrassant fut la célèbre question des logarithmes des nombres négatifs, qui donna lieu à de vifs débats entre Euler et d'Alembert. On s'en tira au moyen d'un nouveau principe, que l'on pourrait appeler *principe de continuation* (*Princip der Fortsetzung*), et qui s'énoncerait ainsi : « Deux fonctions définies par des développements différents de forme, et relatifs à deux intervalles différents, mais contigus, doivent être considérées comme ne formant qu'une seule et même fonction, lorsqu'elles jouissent, chacune dans son intervalle, de propriétés identiques. »

Tout en admettant tacitement ce principe, les géomètres du siècle dernier ne le formulèrent jamais explicitement, et ne cherchèrent nullement à préciser les conditions sous lesquelles deux développements différents, correspondants à des suites différentes de valeurs de la variable, pouvaient être regardés comme appartenant à une même fonction.

On peut citer bon nombre de démonstrations insuffisantes ou inexactes, de propositions mal déterminées ou même tout à fait fausses, présentées par les géomètres les plus illustres, et qui témoignent de l'incertitude qui régnait alors sur les fondements de la théorie des fonctions. Lagrange donnait encore en 1813, dans la seconde édition de sa *Théorie des fonctions analytiques*, une démonstration défectueuse du théorème de Taylor. C'est en 1829 (*), que Cauchy a fait remarquer, pour la première fois, que ce théorème pouvait être en défaut, malgré la convergence de la série. Gauss a le premier énoncé, d'une manière expresse, en 1816 (**), qu'il n'est pas permis de prendre en général l'intégrale d'une fonction entre des limites qui comprennent entre elles une valeur pour laquelle la fonction devient infinie. En 1826, Abel a établi la vraie définition d'une puissance et les règles de convergence de la série du binôme (***) ; avant lui, Poisson signalait

(*) *Leçons sur le Calcul différentiel*, 10e Leçon, p. 105.

(**) *Theorematis de resolubilitate functionum, etc. demonstratio tertia* (GAUSS *Werke*, t. III, p. 63).

(***) *Journal de Crelle*, t. I, p. 311. — *Œuvres complètes*, t. I, p. 66.

dans cette théorie, divers paradoxes, dont Poinsot lui-même n'avait pu trouver l'explication (*). Mentionnons encore les nombreuses tentatives pour étendre la définition des facultés numériques au cas des valeurs négatives ou fractionnaires de la variable : c'est à Weierstrass qu'il était réservé de mener cette entreprise à bonne fin (**).

Cette conception des fonctions, d'après Euler et ses contemporains, reçut une rude atteinte lorsque Fourier démontra, en 1807 (***), la possibilité de développer en séries périodiques, non-seulement des fonctions *analytiques* admettant parallèlement un autre développement suivant les puissances de la variable, mais encore des fonctions entièrement arbitraires et n'étant assujetties à aucune loi simple, c'est-à-dire celles qu'Euler appelait *functiones discontinuæ*, et que M. Hankel désigne sous le nom de *fonctions illégitimes* (*illegitime Functionen*).

Il s'ensuivait de là forcément que l'ancienne idée de fonction n'était plus admissible. En effet, puisque ces fonctions discontinues pouvaient, elles aussi, être représentées par des expressions analytiques, on n'avait plus le droit de regarder les propriétés des fonctions algébriques comme étant des propriétés typiques, applicables à toutes les transcendantes. Et d'autre part, si une seule et même série, pour des valeurs de la variable comprises dans deux intervalles contigus, pouvait représenter des lois analytiques différentes, le *principe de continuation* était par cela même ruiné.

Dirichlet, dans ses travaux sur les séries de Fourier (****), remplaça les anciennes définitions par une autre, aussi générale que possible, en appelant *fonction* de x toute quantité y qui, dans un certain intervalle, prend, pour chaque valeur attribuée à x, une valeur déterminée, la loi de dépendance pouvant, dans cet intervalle, varier d'une manière arbitraire, et n'être exprimable par aucune des opérations mathématiques. Mais cette définition pèche à son tour par excès de généralité, les fonctions ainsi conçues ne conservant plus aucune propriété générale, et les valeurs d'une fonction pour les différentes valeurs de la variable n'ayant plus entre elles aucune espèce de relation.

(*) *Recherches sur l'Analyse des sections angulaires*; 1825.

(**) *Journal de Crelle*, t. LI, 1856, p. 1.

(***) *Bulletin de la Société Philomathique*, t. I, p. 112.

(****) *Repertorium der Physik, herausgegeben von* Dove, t. I, 1837, p. 152.

Il fallait donc compléter la conception de Dirichlet, et Cauchy avait déjà travaillé dans ce sens dès l'année 1815. C'est Riemann qui est enfin parvenu à fonder cette notion sur une base solide (*). Prenant pour point de départ la conception de Dirichlet, il établit celle d'une fonction (monogène) d'une variable complexe, et donna ainsi un corps à une définition trop vague, en se rapprochant de l'ancien point de vue.

Malheureusement il ne fut pas donné au fondateur de la théorie des fonctions de variables complexes d'édifier son système d'après un plan complet et uniforme; il n'a pu nous en laisser que des fragments, qui nous en font apprécier toute la grandeur. Les fondements du nouveau système ne sont pas encore assez à l'abri de toute objection, pour que l'on puisse asseoir sur eux l'ensemble de l'édifice analytique. Par exemple, le principe auquel Riemann a attaché le nom de Dirichlet a été dans ces derniers temps l'objet de nombreuses controverses. Les objections s'appuient sur certains cas d'exception que l'on peut imaginer *a priori*, et dans lesquels les fonctions présentent des discontinuités que l'on ne peut exclure sans discussion, et qui invalident cependant les conclusions que l'on comptait appliquer à toutes les fonctions qui répondent à la définition.

M. Hankel a pensé que le seul moyen d'éclaircir ce qui concerne ces discontinuités, et de préparer la solution du problème de la nature des fonctions, c'était de s'affranchir de toutes les représentations que les mathématiciens les plus récents rattachent encore à la conception d'Euler, et d'établir des distinctions parmi la multitude des relations possibles entre les grandeurs de deux variables, qui sont renfermées dans la pure conception de la fonction d'après Dirichlet, en portant principalement son attention sur les fonctions *illégitimes*, si peu étudiées jusqu'ici. L'objet de son Mémoire est de traiter ces cas paradoxaux des fonctions, en considérant d'abord les variables *réelles* et les valeurs *réelles et finies* des fonctions d'une variable indépendante.

Après avoir établi, dans le § Ier, le sens qu'il attache dans ce Mémoire au mot *fonction*, l'auteur énumère (§ II) les différentes espèces

(*) *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse;* Göttingen, 1851. — Une traduction italienne de ce Mémoire a paru dans les *Annali di Matematica pura ed applicata*, t. II; 1859.

possibles de continuité et de discontinuité des fonctions en certains points. Il considère ensuite (§ III) les fonctions continues en général, et fait voir que, outre les fonctions analytiques ordinaires à oscillations finies, en nombre fini dans un intervalle donné, on peut aussi concevoir des fonctions offrant un nombre infini d'oscillations d'amplitude infiniment petite. Jusqu'à présent, on n'avait représenté analytiquement que des fonctions ayant un nombre infini d'oscillations dans le voisinage seulement de certains points particuliers. A l'aide d'un principe dont l'auteur a puisé l'idée dans un exemple donné par Riemann (*), et auquel il donne le nom de *principe de la condensation des singularités* (§ IV), il est parvenu (§ V) à former des séries absolument convergentes, et oscillant en chaque point dans toute l'étendue d'un intervalle fini (**).

Ces fonctions sont toujours susceptibles d'intégration; mais la question de savoir si elles ont une *dérivée* est sujette à des difficultés particulières. Cette question n'a été que très-rarement traitée, l'exis-

(*) *Ueber die Darstellbarkeit u. s. w.*, art. 6.

(**) Pour éclairer toutes ces discussions, il ne sera pas inutile de citer au moins un des exemples donnés par M. Hankel.

Soit $\varphi(y)$ une fonction remplissant entre $y = -1$ et $y = +1$, excepté pour $y = 0$, les conditions de continuité qui permettent le développement par la série de Taylor, et qui, pour $x = +\varepsilon$, converge vers $+1$, et, pour $x = -\varepsilon$, vers -1, ε étant infiniment petit. On sait qu'une telle fonction peut se représenter par une série trigonométrique ou par une intégrale de Fourier.

La série

$$f(x) = \sum \frac{\varphi(\sin n x \pi)}{n^s}$$

qui s'en déduit est alors continue pour toutes les valeurs irrationnelles de x, et admet une dérivée si l'on fait tendre l'accroissement vers 0 par des valeurs irrationnelles.

Pour x rationnel égal à $\frac{\nu}{\mu}$, on a, abstraction faite des termes qui s'évanouissent avec ε,

$$f\left(\frac{\nu}{\mu} + \varepsilon\right) - f\left(\frac{\nu}{\mu}\right) = \frac{1}{\mu^s} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r\nu}}{r^s}.$$

De plus

$$f\left(\frac{\nu}{\mu} - \varepsilon\right) - f\left(\frac{\nu}{\mu}\right) = -\frac{1}{\mu^s} \sum_{r=1}^{r=\infty} \frac{(-1)^{r\nu}}{r^s}.$$

Ainsi, quand x tend vers $\frac{\nu}{\mu}$, la valeur de la fonction est différente suivant que x reste inférieur ou supérieur à sa limite. Il y a discontinuité pour toutes les valeurs commensurables.

tence d'une tangente en chaque point d'une courbe étant considérée comme d'une évidence géométrique immédiate et comme une conséquence forcée de la *loi de continuité*, devant laquelle on s'inclinait comme devant une nécessité naturelle, inhérente aux lois mathématiques. La tentative faite par Ampère en 1806 (*) n'est rien moins que satisfaisante. La question a été reprise en 1861 par M. Lamarle (**); toutefois sa démonstration, malgré l'approbation de géomètres éminents, n'a pas encore réuni l'assentiment universel. Mais lors même que cette mystérieuse loi de continuité régirait en réalité tous les mouvements dans la nature, ce ne serait pas une raison pour restreindre, en aucune façon, le domaine des mathématiques pures, et cette sorte d'évidence intuitive que l'on invoque a déjà conduit, dans les recherches géométriques, à trop de conclusions erronées pour que l'on soit en droit de la placer sur la même ligne qu'une démonstration scientifique. L'opinion qui semble prévaloir aujourd'hui, et qui fut celle de Gauss, de Dirichlet et de Jacobi, est que l'existence de la dérivée d'une fonction continue n'est pas une *conséquence nécessaire* de la continuité, mais constitue une hypothèse particulière, qui se trouve naturellement satisfaite par les fonctions définies au moyen de l'intégration; et, bien qu'il y ait encore plus d'un mathématicien qui fasse profession de ne pas croire aux fonctions continues sans dérivées, le travail de M. Hankel, qui nous montre des fonctions exprimées *analytiquement* par des séries absolument convergentes, et n'admettant pas néanmoins de dérivée, nous semble devoir modifier ces convictions.

Les §§ VI et VII sont consacrés à l'étude des fonctions *linéairement* discontinues, c'est-à-dire des fonctions qui présentent, dans un intervalle fini, un nombre infini de solutions de continuité. Ces fonctions se partagent en deux classes essentiellement distinctes : celles qui forment une discontinuité *ponctuée*, et celles qui sont *totalement* discontinues. Ces deux classes ne se comportent pas de la même manière au point de vue de l'intégrabilité, les premières étant toujours intégrables, les secondes jamais. Dans le § IX, des fonctions discontinues des deux classes sont représentées par des expressions analytiques.

(*) *Journal de l'École Polytechnique,* XIII[e] Cahier, p. 148.

(**) *Exposé géométrique du Calcul différentiel*, t. I, p. 96.

Le paragraphe final est consacré à la discussion de la notion de fonction, et conclut à la nécessité d'adopter la définition donnée par Riemann.

C'est l'étude des précieux écrits de Riemann, et surtout de son beau Mémoire déjà cité (*Ueber die Darstellbarkeit u. s. w.*) qui a inspiré à M. Hankel son travail sur ces questions délicates, qui, comme le dit Riemann, d'après Dirichlet, « sont intimement liées avec les principes du Calcul infinitésimal, et servent à y introduire plus de précision et de clarté. »

J. Houël.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

MATHEMATISCHE ANNALEN, herausgegeben von A. Clebsch, professor in Göttingen, und C. Neumann, professor in Leipzig. Druck und Verlag von B. G. Teubner (*). T. I; 1869.

Weber (H.). — *Sur l'intégration de l'équation aux dérivées partielles*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0.$$

(37 p.; all.)

On sait que cette équation se présente dans plusieurs questions de Physique mathématique : théorie du mouvement de la chaleur dans les espaces cylindriques, vibrations transversales des membranes tendues et des plaques élastiques, etc.

En général, dans les problèmes à résoudre, la constante k qui figure dans l'équation précédente n'est pas *donnée à l'avance*; mais elle doit être déterminée d'après certaines conditions aux limites qui seraient *incompatibles avec l'équation différentielle si k était choisi arbitrairement.* Ces conditions aux limites sont de différente nature, à cause de la variété des questions dans lesquelles on rencontre l'équation proposée. Ainsi, dans la théorie des plaques élastiques, il faut que u,

(*) Annales mathématiques, publiées par A. Clebsch, professeur à Gœttingue, et C. Neumann, professeur à Leipzig. Librairie de B.-G. Teubner. — Ce Recueil paraît en Cahiers détachés gr. in-8, d'à peu près 200 pages. Quatre Cahiers forment un volume d'environ 40 feuilles. Prix : 5 $\frac{1}{3}$ Thlr. En allemand, en français, etc.

sans être nul pour tous les points situés *à l'intérieur* d'une courbe fermée, devienne égal à zéro *sur le périmètre* de la courbe. Dans certains problèmes de la théorie de la chaleur, il doit y avoir, sur le périmètre de la courbe, entre la température u et son coefficient différentiel $\frac{\partial u}{\partial p}$, pris suivant la normale, une relation de la forme

$$u + \alpha \frac{\partial u}{\partial p} = 0.$$

Etc.

M. Weber est le premier à notre connaissance qui donne dans l'étude de ces questions des démonstrations rationnelles et irréprochables au point de vue de la rigueur. La Physique mathématique a exercé et exercera encore, cela n'est pas douteux, une grande influence sur le progrès des Mathématiques pures; elle présente le grand avantage de poser des problèmes dont les conditions sont définies par la nature, et qui sont susceptibles, en général, d'une solution unique. Mais il importe, croyons-nous, qu'elle soit traitée avec toute la rigueur que comportent les autres parties des Mathématiques. A ce point de vue, la lecture du Mémoire dont nous venons de transcrire le titre nous paraît des plus instructives. La méthode de M. Weber est analogue à celle dont Riemann a fait un si heureux emploi dans l'étude de l'équation plus simple

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Sans entrer dans l'analyse détaillée des résultats, nous remarquerons qu'ils établissent la plus grande analogie entre la fonction u satisfaisant à l'équation

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0,$$

et la fonction $A \cos kx + B \sin kx$, intégrale de la suivante :

$$(2) \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} + k^2 u = 0,$$

qui contient une variable de moins, mais qui est tout à fait semblable à la proposée (1).

Par exemple, on sait que si k est donné, on ne peut pas disposer

des constantes A et B, de manière que $A\cos kx + B\sin kx$ s'annule pour deux valeurs de x, a et b; pour qu'il en soit ainsi, il faut que $a - b$ soit un multiple de $\frac{\pi}{k}$, d'où

$$k = \frac{n\pi}{a-b}.$$

De même, cherchons une fonction u de deux variables, satisfaisant à l'équation proposée, et s'annulant sur tous les points d'une courbe fermée. Ce problème sera impossible si k est arbitraire, et ne satisfait pas à une certaine équation transcendante, ayant une infinité de racines.

Le Mémoire se termine par la résolution effective de l'équation proposée dans le cas d'un espace plan limité par des paraboles confocales.

Lüroth (J.). — *Sur quelques propriétés d'une classe de courbes du quatrième ordre.* (17 p.; all.)

Soit l'équation

$$\sum_1^5 (a_i x + b_i y + c_i)^4 = 0.$$

Cette équation représente une courbe du quatrième degré, et contient quinze constantes, autant qu'il y en a dans l'équation la plus générale des courbes du quatrième ordre. M. Clebsch a donc obtenu un résultat des plus curieux (*) en établissant que la forme précédente d'équation n'est pas propre à représenter toutes les courbes du quatrième ordre; elle ne s'applique, en réalité, qu'à celles pour lesquelles s'annule un invariant, du sixième ordre par rapport aux coefficients. M. Lüroth ajoute plusieurs propositions à celles qu'avait déjà données M. Clebsch sur ces courbes, si près d'être les plus générales de leur degré.

Cayley (A.). — *Sur la solution de l'équation quartique* $\alpha U + 6\beta H = 0$. (2 p.; angl.)

Clebsch (A.) et Gordan (P.). — *Sur la théorie des formes cubiques ternaires.* (34 p.; all.)

Très-important travail d'ensemble, où les auteurs reprennent cette

(*) *Journal de Crelle*, t. LIX, p. 125.

théorie déjà étudiée par MM. Aronhold, Brioschi, etc. Les auteurs font connaître beaucoup de relations nouvelles ; malheureusement les travaux de cette nature sont difficiles à analyser. Le Mémoire se termine par la démonstration des belles formules de M. Aronhold, qui établissent un lien si intime entre la théorie des formes cubiques et celle des fonctions elliptiques.

Gordan (P.). — *Sur les formes ternaires du troisième degré.* (39 p.; all.)

M. Gordan a établi, dans ces derniers temps (*), un résultat qui a attiré l'attention de tous les géomètres : à chaque forme binaire correspond un système de covariants en nombre limité, système que l'auteur appelle *complet*, et qui jouit de la propriété suivante : Tout autre covariant s'exprime en fonction entière des formes du système complet. Dans le Mémoire actuel, M. Gordan s'est proposé d'étendre le même théorème aux formes cubiques ternaires.

Geiser. — *Sur les tangentes doubles d'une courbe plane du quatrième ordre.* (10 p.; all.)

Si d'un point p on mène des tangentes à une surface du troisième ordre, ces tangentes forment un cône du sixième degré. Si le point p est pris sur la surface, ce cône se décompose en un plan double, le plan tangent au point p, et en un cône du quatrième ordre. On connaît déjà un plan tangent double de ce cône, le plan tangent à la surface en p ; les autres plans tangents doubles du cône doivent l'être aussi de la surface, et, par conséquent, doivent passer par une de ses vingt-sept droites. On a donc vingt-huit plans tangents doubles du cône circonscrit, et, par suite, vingt-huit tangentes doubles de l'une quelconque des sections planes de ce cône, qui sont des courbes du quatrième ordre.

Tel est le point de départ de M. Geiser ; on voit qu'il établit une relation entre le problème des droites sur une surface du troisième degré, et celui des tangentes doubles aux courbes du quatrième ordre. Cette analogie entre les deux problèmes a été démontrée analytiquement par M. Jordan, dans son *Traité des Substitutions*.

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXVI, p. 1117 et 1172. Depuis, l'auteur a publié un Mémoire étendu sur ce sujet, justement dans le Recueil dont nous commençons l'analyse, t. II, Cahier 2, p. 227-281. — *Voir* aussi Cayley, t. CXLVI des *Philosophical Transactions*, p. 101, et Gordan, *Journal de M. Borchardt*, t. LXIX, p. 323.

Schering (E.). — *Communication relative au troisième volume des Œuvres de Gauss.* (16 p.; all.)

Jordan (C.). — *Commentaire sur Galois.* (16 p.; fr.)

Ce travail, écrit avec beaucoup de clarté, est plus qu'un commentaire, et contient des théorèmes nouveaux et importants. Nous citerons le suivant :

« Si les racines de deux équations irréductibles $F(x) = 0$, $f(z) = 0$ sont liées par des relations algébriques, ces relations peuvent se déduire d'une seule équation ayant la forme

$$\varphi(z_1, z_2, \ldots) = \psi(x_1, x_2, \ldots),$$

dans laquelle les racines sont séparées. »

Königsberger. — *Les équations modulaires des fonctions hyperelliptiques du premier ordre, pour la transformation du troisième degré.* (4 p.; all.)

Königsberger. — *Équation différentielle à laquelle satisfont les périodes des fonctions hyperelliptiques du premier ordre.* (3 p.; all.)

Königsberger. — *Rectification d'un théorème d'Abel concernant les fonctions algébriques.* (2 p.; all.).

On connaît l'expression générale qu'a donnée Abel, pour une fonction algébrique, dans son Mémoire sur l'impossibilité de résoudre généralement les équations d'un dégré supérieur au quatrième (*). Cette expression est de la forme

$$v = r_0 + p_1^{\frac{1}{n}} + r_2 p_1^{\frac{2}{n}} + \ldots + r_{n-1} p_1^{\frac{n-1}{n}},$$

où Abel affirme que p_1 est une fonction d'ordre $\mu - 1$. C'est là le point critiqué par l'auteur, qui corrige le théorème de la manière suivante :

Si v est une fonction algébrique d'ordre μ et de degré m, on aura

$$v = q_0 + p^{\frac{1}{n}} + q_2 p^{\frac{2}{n}} + \ldots + q_{n-1} p^{\frac{n-1}{n}},$$

où n est un nombre premier, $q_0, q_2, \ldots, q_{n-1}$ des fonctions algébriques d'ordre μ et du degré $m - 1$ au plus, et p une fonction telle, que $p^{\frac{1}{n}}$ soit aussi du μ^e ordre.

(*) *Journal de Crelle*, t. I, p. 65; et *Œuvres complètes*, t. I, p. 5.

Clebsch (A.). — *Sur les courbes qui correspondent aux fonctions abéliennes de la classe* $p = 2$. (3 p.; all.)

Dans cette courte Note, l'auteur reprend une question qu'il avait déjà traitée dans l'Ouvrage, devenu classique, qu'il a publié en collaboration avec M. Gordan : *Theorie der Abel'schen Functionen* (*).

Bessel (A.). — *Sur les invariants des systèmes simples de formes binaires simultanées.* (22 p.; all.)

M. Hermite, dans ses Études sur la résolution de l'équation du cinquième degré, établit que tout invariant d'une forme binaire du cinquième degré est une fonction rationnelle et entière des trois invariants fondamentaux, et de l'invariant du dix-huitième degré qui est égal à la racine carrée d'une fonction entière de ces trois invariants. M. Bessel parvient à des théorèmes semblables pour les systèmes les plus simples de formes binaires simultanées.

Neumann (C.). — *Recherches géométriques sur le mouvement d'un corps solide.* (13 p.; all.)

Étant donnés deux triangles égaux dans l'espace, amener l'un de ces triangles à coïncider avec l'autre par un mouvement hélicoïdal, et construire l'axe de rotation.

Neumann (C.). — *Sur la théorie des déterminants fonctionnels.* (2 p.; all.)

Harbordt (F.) — *Le système simultané d'une forme biquadratique et d'une forme quadratique binaires.* (15 p.; all.)

Étude des invariants et des covariants. Représentation typique.

Brill (A.). — *Sur les équations différentielles de la théorie de la lumière.* (28 p.; all.)

Milieux isotropes. Équations différentielles en coordonnées curvilignes. Application d'un résultat d'intégration dû à Euler.

Clebsch (A.). — *De la représentation sur le plan des surfaces algébriques, et en particulier des surfaces du quatrième et du cinquième ordre.* (63 p.; all.)

Ce Mémoire est consacré à l'étude et à la théorie générale d'une

(*) Leipzig, Teubner, 1866. In-8, XIII-333 p. Prix : 2 Thlr. 16 Ngr.

classe de problèmes dont M. Clebsch s'est déjà beaucoup occupé (*), et dont il est impossible de méconnaître l'importance.

Imaginons une surface de degré N telle, que les coordonnées homogènes d'un de ses points soient des fonctions homogènes et entières de trois paramètres ξ_1, ξ_2, ξ_3, représentées par des équations de la forme

$$\begin{aligned}\rho x_1 &= f_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3),\\ \rho x_2 &= f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3),\\ \rho x_3 &= f_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3),\\ \rho x_4 &= f_4(\xi_1, \xi_2, \xi_3),\end{aligned}$$

où les quantités x_1, x_2, x_3, x_4 désignent les coordonnées homogènes d'un point, ρ un facteur indéterminé, et f_1, f_2, f_3, f_4 des fonctions homogènes du degré n. Supposons que l'on puisse, des équations précédentes, tirer les ξ comme fonctions rationnelles des x. Alors, si l'on considère ξ_1, ξ_2, ξ_3 comme les coordonnées homogènes d'un point dans un plan, *à un point du plan correspondra toujours un seul point de la surface, et réciproquement*. On dit alors que la surface est *eindeutig abgebildet,* qu'elle est représentée d'une manière unique sur le plan. L'expression allemande est assez difficile à traduire, mais la question n'en est pas moins fort intéressante, et M. Clebsch a rendu service à la science en en reprenant l'étude générale. Quand une surface est appliquée sur un plan, l'étude des courbes algébriques qu'elle contient est faite implicitement.

A côté de la théorie générale, le Mémoire contient des exemples nombreux : surfaces du troisième ordre, du quatrième ordre avec droite double, etc., etc.

Pour le troisième ordre, des considérations géométriques simples permettent de résoudre le problème. Considérons, en effet, une droite mobile, assujettie dans son mouvement à rencontrer deux droites de la surface. Elle coupera la surface en un troisième point x, et un plan quelconque en un point ξ. Un point ξ ou un point x suffisent à déterminer la droite. On voit donc qu'à un point ξ répondra un seul point x, et réciproquement. La surface est donc appliquée sur le plan, dans le sens que nous avons donné plus haut.

(*) *Journal de Crelle*, t. LXV, p. 359-380 : Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung. — T. LXIX, p. 142-184 : Ueber die Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen. — *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXVII, p. 1238.

NEUMANN (C.). — *Note sur un écrit publié récemment et traitant de l'Électrodynamique.* (8 p.; all.)

Cet écrit, intitulé : *Die Principien der Electrodynamik* (*) est dû à M. Neumann, qui a publié un grand nombre d'excellents traités sur des points variés d'Analyse et de Physique mathématique. Les principes qui en forment la base ont été l'objet de quelques critiques, produites par M. Clausius dans les *Annales de Poggendorff* (t. CXXXV, p. 606). L'auteur défend son œuvre, et répond aux objections en exposant d'une manière très-claire les hypothèses fondamentales qu'il a faites pour expliquer les phénomènes électrodynamiques.

La formule employée par M. Neumann est la suivante, qui donne le potentiel w de deux masses électriques :

$$w = \frac{mm'}{r}\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right].$$

On voit que le potentiel ne dépend pas seulement de la situation respective des deux masses, comme dans la loi de Newton. La dérivée $\frac{dr}{dt}$ de la distance, par rapport au temps, fait intervenir ici la vitesse relative des deux masses électriques.

L'auteur a montré, dans son livre, qu'on pouvait expliquer cette formule hypothétique, en admettant que l'action électrique a besoin d'un certain temps pour se transmettre d'un point à un autre.

Dans tous les cas, l'expression donnée plus haut pour le potentiel permet, si on l'admet, d'expliquer tous les phénomènes d'induction et d'action électrodynamique (**).

(*) Tübingue, 1868.

(**) Ne pouvant pour le moment consacrer un article développé à cette intéressante question, nous nous contenterons d'indiquer les sources suivantes :

RIEMANN (B.) : « Ein Beitrag zur Electrodynamik ». (*Annales de Poggendorff*, t. CXXXI, 1867, p. 237.)

LORENZ : « Ueber die Identität der Schwingungen des Lichts mit den elektrischen Strömen ». (*Ibid.*, p. 243.)

CLAUSIUS : « Ueber die von Gauss angeregte neue Auffassung electrodynamischen Erscheinungen ». (*Ann. de Pogg.*, t. CXXXV, 1868, p. 606.)

WEBER (W.) : « Ueber einen einfachen Ausspruch des allgemeinen Grundgesetzes der elektrischen Wirkung ». (*Ann. de Pogg.*, t. CXXXVI, 1869, p. 485.)

NEUMANN (C.) : « Theoria nova phænomenis electricis applicanda. » (*Ann. di Matematica*, t. II, série II, p. 120.)

NEUMANN : « Ueber die oscillirende Entladung einer Franklin'schen Tafel ». (*Nachrichten von der K. Gesellschaft zu Göttingen*; 1869, janvier.)

BETTI (E.) : « Teorica delle forze che agiscono secondo la legge di Newton, e sua

Neumann (C.). — *Sur le mouvement de l'éther dans les cristaux.* (34 p.; all.)

Clebsch (A.) et Gordan (P.). — *Sur les formes biternaires avec des variables contragredientes.* (42 p.; all.)

Étude sur la théorie d'une espèce particulière de formes. Ces formes contiennent deux séries de variables, celles qui se transforment par une substitution linéaire, x_1, x_2, x_3, et celles qui se transforment en même temps par la substitution inverse, u_1, u_2, u_3. En d'autres termes, égalées à o, elles donneraient une relation entre les coordonnées homogènes d'un point et les coordonnées tangentielles d'une droite. De telles formes se rencontrent souvent comme *dérivées d'une forme fondamentale*, sous le nom de *covariants mixtes* ou de *concomitants* (mixtes). Les auteurs les considèrent ici comme *formes fondamentales*, et en commencent l'étude directe et détaillée.

Brill (A.). — *Note relative au nombre des modules d'une classe de fonctions algébriques.* (5 p.; all.)

Cette Note se rapporte à un des points les plus délicats de la théorie des fonctions abéliennes. Riemann avait donné une formule dont l'exactitude a été contestée par M. Cayley (*). M. Brill examine un cas particulier où la formule de Riemann et celle de M. Cayley doivent conduire à des résultats différents. La conclusion est en faveur de Riemann.

Müller (H.). — *De la géométrie des surfaces du second ordre.* (18 p.; all.)

Étude sur les courbes gauches du troisième ordre et sur leurs sécantes.

Jonquières (E. de). — *Sur les réseaux de courbes et de surfaces algébriques.* (8 p.; fr.)

Zeuthen (H. G.). — *Notes sur un système de coordonnées linéaires dans l'espace.* (23 p.; fr.)

Le système de coordonnées linéaires proposé par M. Zeuthen est

---

applicazione alla elettricità statica ». (*Il Nuovo Cimento*, t. XVIII, 1863, p. 385; t. XIX, 1863, p. 59, 77, 149, 357; t. XX, 1864, p. 19, 121. — « Sopra la Elettrodinamica ». (*Ibid.*, t. XXVII, 1867, p. 402.) *Voir* aussi *Nuovo Cimento.* (T. XXVII, mai et juin 1868.)

(*) *Voir* Clebsch und Gordan, *Theorie der Abel'schen Functionen* : Préface.

analogue à celui que M. Cayley a indiqué en 1860 (*), et dont il a fait aussi usage dans un Mémoire récent (**). Si l'on appelle *moment d'une droite par rapport à un axe,* le moment d'une force égale à l'unité et placée sur cette droite, les six coordonnées employées par M. Zeuthen sont les six moments d'une droite par rapport aux arêtes d'un tétraèdre. Entre ces six coordonnées doivent avoir lieu évidemment deux relations, puisqu'une droite se détermine seulement par quatre paramètres. L'une de ces deux relations est homogène, et très-simple, l'autre n'est pas homogène et prend une forme très-compliquée. L'auteur applique le nouveau système de coordonnées à l'étude des complexes linéaires et des surfaces complexes de Plücker. Il fait aussi remarquer que l'étude des complexes linéaires avait déjà été faite implicitement avant Plücker par M. Chasles. « On peut donc, dit-il, dans les tomes XVI (***) et LII (****) des *Comptes rendus*, puiser une discussion des complexes linéaires qui est antérieure à celle de M. Plücker. »

Reye (Th.). — *Génération géométrique des surfaces du troisième, du quatrième ordre, et en général d'un ordre quelconque, au moyen des réseaux de surfaces d'ordre inférieur.* (12 p.; all.)

M. Reye est connu des géomètres par plusieurs importants Mémoires de Géométrie et par un Traité complet intitulé : *Die Geometrie der Lage. Vorträge von Dr Theodor Reye* (*****).

Le Mémoire dont nous venons de transcrire le titre contient plusieurs propositions d'un grand intérêt pour la théorie des surfaces. Comme le fait remarquer l'auteur, la génération des figures au moyen de figures plus simples constitue un des moyens d'investigation les plus puissants de la Géométrie synthétique.

Pour les courbes, on sait depuis longtemps que, si l'on considère deux *faisceaux* de courbes se correspondant projectivement, et d'ordres p et q, ces deux faisceaux peuvent engendrer, par l'intersection des courbes qui les composent, toute courbe de l'ordre $p+q$. Ce théo-

---

(*) *Quart. Math. Journal*, t. III, p. 226.

(**) *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, vol. XI, part. II : On the six coordinates of a line.

(***) P. 1420-1432.

(****) P. 1094.

(*****) Hanovre, 1868, Carl Rümpler; en deux Parties. In-8°. Prix : 13 fr. 35 c.

rème ne s'étend pas généralement aux surfaces, et l'on ne peut construire une surface d'ordre $p+q$ au moyen de faisceaux d'ordre p et q, que si la surface proposée contient en nombre infini des courbes $C^{p,q}$ (*), ce qui n'arrive pas généralement.

Pour parer à ces inconvénients, M. Reye construit les surfaces, non plus au moyen des lignes d'intersection de deux séries de surfaces, $C^{p,q}$, mais par des points (l, m, n) déterminés par l'intersection de trois séries de surfaces.

Si nous avons bien compris, par exemple, le mode de génération des surfaces du quatrième ordre, voici comment on pourrait l'exposer *analytiquement*.

Considérons deux réseaux du second degré

$$(a) \qquad \lambda F + \mu F_1 + \nu F_2 = 0,$$

$$(\alpha) \qquad \lambda' \Phi + \mu' \Phi_1 + \nu' \Phi_2 = 0,$$

et établissons entre les paramètres la relation

$$(1) \qquad \lambda\lambda' + \mu\mu' + \nu\nu' = 0.$$

Quand les trois paramètres λ', μ', ν' resteront fixes, les paramètres λ, μ, ν *pourront varier en restant assujettis à la relation* (1), et les surfaces du réseau (a) passeront par la courbe dont les équations sont

$$(2) \qquad \frac{F}{\lambda'} = \frac{F_1}{\mu'} = \frac{F_2}{\nu'}.$$

On peut dire d'après cela qu'à une surface du réseau (α) correspond une courbe du réseau (a), et réciproquement. Si l'on cherche le lieu des intersections de la surface et de la courbe correspondante, il faut éliminer λ', μ', ν' entre les équations (α) et (2), et l'on obtient la surface du quatrième degré dont l'équation est

$$F\Phi + F_1\Phi_1 + F_2\Phi_2 = 0.$$

Cette surface est le lieu des points d'intersection d'une surface de l'un des réseaux et de la courbe qui lui correspond dans l'autre. Elle est donc construite par points et non par lignes.

(*) L'auteur emploie des notations qui abrégent beaucoup les raisonnements : F^p, F_1^p, F_2^p désignent des surfaces d'ordre p; $C^{p,q}$, $C_1^{p,q}$ expriment des courbes intersections de surfaces F^p, F^q; (l, m, n) sont les points d'intersection de F^l, F^m, F^n.

HANKEL (H.). — *Les fonctions cylindriques* (*) *de première et de seconde espèce.* (35 p.; all.)

On sait que ces fonctions ont été étudiées par un très-grand nombre de géomètres. Dans ces derniers temps, MM. Neumann (**) et Lommel (***) ont publié des traités développés sur ce sujet, qui tient une place si importante dans la théorie du développement des fonctions, surtout en Astronomie. M. Hankel donne ici de nouveaux développements en série, et examine d'une manière détaillée le cas où la variable prend des valeurs complexes (****).

KINKELIN (H.). — *Nouvelle démonstration de l'existence des racines complexes dans une équation algébrique.* (5 p.; all.)

NEUMANN (C.). — *Note sur le pendule cycloïdal.* (2 p.; all.)

Considérons un pendule cycloïdal, et soient α, γ les points entre lesquels oscille le mobile. Construisons un cercle qui touche, à la fois, la droite horizontale $\alpha\gamma$ et la cycloïde au point le plus bas β. Si l'on projette horizontalement le mobile m sur le cercle en m', le mobile projection m' se déplacera d'une manière uniforme sur le cercle. Cette construction géométrique donne donc d'une manière très-simple la loi du mouvement sur la cycloïde.

DURÈGE (H.). — *Sur une série de tangentes menées successivement à une courbe du troisième ordre ayant un point double ou un point de rebroussement.* (24 p.; all.)

Imaginons qu'on mène une tangente en un point A_1 d'une courbe du troisième ordre. Cette tangente va couper la courbe en un nouveau point A_2; on mène une tangente en ce nouveau point qui va couper la courbe en un point A_3, etc., etc. En continuant indéfiniment ces constructions, on obtiendra une suite de points A_1, A_2, A_3, ..., A_n, ... On peut se demander si le point A_n approche d'une position limite quand n augmente indéfiniment; si, dans certains cas,

(*) Fonctions de Bessel satisfaisant à l'équation

$$\frac{d^2R}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)R = 0.$$

(**) *Theorie der Bessel'schen Functionen.* Leipzig, Teubner, 1867.

(***) *Studien über die Bessel'schen Functionen.* Leipzig, Teubner, 1868.

(****) Depuis, M. Neumann a publié sur cette question un nouveau travail inséré dans les *Mémoires de l'Académie de Saxe.*

il pourra coïncider avec A_1 (on aurait dans ce cas un polygone de degré n à la fois inscrit et circonscrit à la courbe), etc., etc. On peut encore mener d'un point pris sur la courbe une tangente quelconque, du nouveau point de contact une nouvelle tangente, etc. M. Durège fait l'étude de toutes ces questions dans le cas particulier où la courbe a un point double ou un point de rebroussement.

Sturm (R.). — *Le problème de l'homographie, et son application aux surfaces du second ordre.* (42 p.; all.)

Beltrami (E.). — *Sur la théorie de la courbure des surfaces.* (8 p.; all.)

Cet élégant article contient plusieurs expressions nouvelles de la courbure d'une surface et de la courbure géodésique.

Jordan (C.). — *Sur les équations de la division des fonctions abéliennes.* (9 p.; fr.)

Extrait du *Traité des équations algébriques et des substitutions*. L'auteur arrive à d'importants résultats, dont voici l'énoncé : La résolution de l'équation qui donne la division des périodes dans les fonctions abéliennes à $2n$ périodes se ramène à celle d'une suite d'équations simples, qui auront toutes pour ordre un nombre premier (et par suite seront abéliennes), sauf une seule, dont l'ordre est égal à $\frac{(p^{2n}-1)p^{2n-1}\ldots(p^2-1)p}{2}$, ou au double de ce nombre si $p=2, n>2$.

Korndörfer (G.). — *De la représentation sur le plan d'une surface du quatrième ordre, avec un ou plusieurs points singuliers* (*). (35 p.; all.)

Müller (H.). — *Étude synthétique d'un faisceau de surfaces du second ordre.* (7 p.; all.)

Clebsch (A.). — *Remarques sur la géométrie des surfaces gauches du troisième ordre.* (3 p.; all.)

Classification simple et intuitive des courbes tracées sur ces surfaces.

(*) *Voir*, au sujet de ces problèmes, la Note que nous avons mise, p. 129, à la suite d'un Mémoire de M. Clebsch.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

HOFFMANN (L.), Baumeister in Berlin, und NATANI (L.). — MATHEMATISCHES WÖRTERBUCH. *Alphabetische Zusammenstellung sämmtlicher in die mathematischen Wissenschaften gehorender Gegenstände, in erklärenden und beweisenden, synthetisch und analytisch bearbeiteten Abhandlungen.* — 7 Bde gr. 8; 1858-1867. Berlin, Verlag von Wiegandt und Hempel (*).

En raison du développement qu'ont pris de nos jours les sciences exactes, rien ne serait plus désirable qu'une bonne Encyclopédie mathématique contenant l'exposition par les meilleures méthodes des théories fondamentales, renvoyant aux auteurs spéciaux pour les sujets accessoires ou pour ceux qui exigeraient de trop longs développements, et fournissant sur toutes les parties des renseignements bibliographiques et historiques aussi complets que possible.

Il est vrai que la réalisation d'une aussi vaste entreprise dépasserait les forces d'un seul homme, et ne pourrait être menée à bonne fin que par une association de géomètres. Il existe cependant des Ouvrages qui, sans atteindre entièrement le but, n'en ont pas moins rendu de grands services. Celui de tous qui a le mieux représenté la science de son temps, l'ancien Dictionnaire de Klügel, avec les suites de Mollweide et de Grunert (**), est encore, à l'heure présente, un livre précieux à consulter au point de vue de l'histoire scientifique.

L'Ouvrage plus moderne que nous annonçons ici ne présente pas la même unité de plan que le précédent, le continuateur s'étant écarté, avec grande raison, des traces du premier auteur. En effet, la rédaction des quatre premiers volumes (A — P) est loin de justifier

(*) HOFFMANN (L.), architecte à Berlin, et NATANI (L.). — *Dictionnaire mathématique. Recueil alphabétique de toutes les matières relatives aux Sciences mathématiques, expliquées et démontrées dans des articles rédigés synthétiquement et analytiquement.* — Berlin, Wiegandt et Hempel. 1858-1867. — 7 vol. gr. in-8, imprimés sur deux colonnes. Prix : 30 Thlr.

(**) *Mathematisches Wörterbuch, oder Erklärung der Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik, mit den nöthigen Beweisen und literarischen Nachrichten begleitet, in alphabetischer Ordnung.* Von GEORG SIMON KLÜGEL, Prof. d. Math. u. Physik auf der Friedrichs-Universität zu Halle, u. s. w. Leipzig, Schwickert. In-8. — T. I-III (A-P), 1803-1808, par KLÜGEL. — T. IV (Q-S), 1823, par C.-BR. MOLLWEIDE. — T. V (T-Z), 1831, et *Suppléments*, t. I et II, 1833-1836, par J.-A. GRUNERT.

les promesses du titre; les articles se rapportant aux sujets les plus variés des Mathématiques pures et appliquées, de l'Astronomie, de la Physique, etc., y sont traités d'une manière trop superficielle pour que nous ayons à nous en occuper ici.

A la mort d'Hoffmann, en 1864, les éditeurs chargèrent M. Natani d'achever l'œuvre interrompue, et le nouveau rédacteur a tenu à réparer, autant que le permettaient les circonstances, l'insuffisance des premiers volumes. Tout en continuant la série des articles sur les Mathématiques appliquées, il a refait presque toute la partie des Mathématiques pures, et il a pu ensuite, en faisant tirer à part les articles les plus importants, en composer un Traité complémentaire de Calcul intégral, d'après les méthodes les plus récentes (*).

Nous citerons seulement les sujets des principaux articles rédigés par M. Natani :

Méthode des moindres carrés. (16 p.)

Formes quadratiques (Théorie des nombres). (30 p.)

Équations indéterminées du second degré.

Résidus quadratiques. (36 p.)

Quadrature analytique. (197 p.) Cet article traite avec développement du calcul des intégrales indéfinies et définies, tant simples que multiples, et contient une Table d'intégrales.

Intégration des équations aux différentielles totales. (125 p.)

Intégration des équations aux différentielles partielles, suivant la méthode de Pfaff, perfectionnée par l'auteur (*Journal de Crelle-Borchardt*, t. LVIII). (85 p.)

Théorie des quantités imaginaires et des fonctions de variables complexes, principalement d'après les méthodes de Cauchy. (149 p.)

Ces quatre derniers articles composent le volume intitulé : *Die hohere Analysis*. Nous regrettons que l'auteur n'y ait pas ajouté, comme complément, un Chapitre sur les Quaternions d'Hamilton.

Précis de Géométrie élémentaire (*Raumlehre*). (115 p.)

(*) Die höhere Analysis. *In vier Abhandlungen. Mit Berücksichtigung der Theorie der complexen Grössen und anderer neuen Untersuchungen. Supplement zu den Lehrbüchern der Differenzial- und Integral-Rechnung.* — Die Variationsrechnung. *Anhang zur höheren Analysis.* — Von L. Natani. Berlin, 1866. — 1 vol. gr. in-8 (568-54 p.). Prix : 5 $\frac{2}{3}$ Thlr.

Ce volume est la réunion de cinq articles, tirés des tomes V et VII du *Mathematisches Wörterbuch.*

Des séries. (76 p.)

Théorie des mouvements vibratoires. (37 p.)

Statique. (36 p.)

Théorie du choc des corps. (27 p.)

Théorème de Sturm, avec extension aux racines complexes. (12 p.)

Théorie des substitutions linéaires (déterminants, formes binaires, etc.). (80 p.)

Trigonométrie. (46 p.)

Calcul des variations. (51 p.)

Théorie mathématique de la chaleur. (161 p.)

Calcul des probabilités. (25 p.)

Roues hydrauliques et turbines. (63 p.)

La partie typographique de cet Ouvrage laisse à désirer, principalement à cause de la disposition à deux colonnes que l'on avait adoptée pour ménager la place, et qui devient un embarras, dès que l'on a des formules un peu longues à inscrire. Les nombreuses figures sur fond noir, insérées dans le texte, sont nettement exécutées

J. Hoüel.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

ZEUTHEN (H.-G.). — Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable. — In-4, 43 p. *Annali di Matematica*, 2e série, t. III, p. 175-217, 1869-70.

Tous les géomètres connaissent la polémique qu'eut à soutenir Poncelet avec Gergonne au sujet de la belle et féconde théorie des polaires réciproques. Gergonne reconnut, dès le commencement, l'importance de la découverte, et, adoptant les idées de Poncelet, les développant sous une forme plus claire et plus élémentaire, il dégagea le premier, de la manière la plus nette, le célèbre principe de *dualité* ou de *réciprocité* que mettaient en évidence la théorie des *polaires réciproques* pour les figures planes et, pour les figures sphériques, la notion beaucoup plus ancienne des figures *supplémentaires*.

Poncelet avait montré que la polaire réciproque d'une courbe du second degré est, dans tous les cas, une courbe du second degré. Trompé par l'analogie, Gergonne étendit ce théorème aux courbes de degré supérieur et affirma qu'une courbe de degré n a pour polaire réciproque une courbe de même degré. C'était admettre implicitement que, d'un point, on ne peut mener à une courbe qu'un nombre de tangentes égal à son degré. Gergonne énonça cette proposition avec sa clarté habituelle, notamment, si nos souvenirs sont bien précis, dans son article sur les lois générales qui régissent les surfaces courbes.

Plusieurs années auparavant, dans un travail dont Gergonne n'avait sans doute aucun souvenir (t. VIII des *Annales*), Poncelet avait déjà établi une proposition contradictoire avec la précédente, et montré qu'on peut, en général, mener, à une courbe de degré n, $n(n-1)$ tangentes passant par un point. Gergonne aurait pu contester l'exactitude de ce résultat. A cette époque, on n'avait que des idées très-imparfaites sur le théorème de Bezout. On savait bien que deux courbes quelconques des degrés m et n se coupent en général en mn points, mais on n'avait pas encore acquis la notion des solutions *infinies*, et l'on ne regardait le nombre mn, donné par le théorème de Bezout, que comme un maximum au-dessous duquel pouvait rester, dans certains cas, le nombre des solutions communes. Or les deux courbes considérées par Poncelet, et dont les points d'intersection étaient les points de contact cherchés, n'étaient pas indépendantes l'une de l'autre. C'est à peu près ce que dit Gergonne; mais, reconnaissant que sa proposition sur le nombre des tangentes n'était pas justifiée, il corrigea ses théorèmes à double colonne, en introduisant une idée très-importante, celle de *classe* d'une courbe.

Cette notion de la *classe* est restée dans la science, et nous croyons inutile de la définir à nos lecteurs. Le degré d'une courbe est égal à la classe de sa polaire réciproque. Toute courbe d'une classe égale à son degré a pour polaire réciproque une courbe de même degré ou classe. C'est ce qui explique le théorème relatif aux courbes du second degré, qui sont de la seconde classe.

Mais ici se présentait une difficulté nouvelle, dont la solution complète devait demander bien des efforts, mais aussi amener une longue suite de belles et importantes découvertes.

Soient une courbe de degré n et sa polaire réciproque de degré N.

On devrait avoir, d'après la proposition de Poncelet,

$$n = N(N-1),$$
$$N = n(n-1).$$

Ces deux équations sont évidemment incompatibles.

On pouvait sans doute expliquer d'une manière vague ce paradoxe en faisant remarquer que, si la courbe proposée est la courbe la plus générale parmi celles de son degré, n, il n'en est plus de même de la polaire réciproque; celle-ci ne contient pas, dans son équation, le nombre de coefficients indépendants que comporte l'équation générale du $N^{ième}$ degré, c'est une courbe très-particulière parmi celles de ce degré; il n'y a donc rien d'étonnant à ce que la *classe* de cette courbe subisse une grande réduction.

Poncelet ne se contenta pas heureusement de cette explication générale, et, dans le tome IV du *Journal de Crelle,* il donna quelques principes qui devaient mettre sur la voie d'une explication définitive.

Dans le *Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques* (*Journal de Crelle,* t. IV) se trouvent énoncés deux résultats importants :

Tout point double abaisse la classe d'une courbe de deux unités;

A un point d'inflexion dans une courbe correspond un point de rebroussement dans la polaire.

Il n'y a que peu de choses à ajouter à ces deux principes pour lever la difficulté qui préoccupait Poncelet; pourtant, plusieurs années après, cet illustre géomètre, dans l'*Analyse des transversales* (*Journal de Crelle*, t. VIII, p. 391), n'avait rien ajouté d'essentiel, et il ne revient sur la question que pour corriger une erreur qu'il avait commise sur les points multiples d'ordre supérieur à 2. Il montre qu'un point multiple d'ordre p abaisse la classe de $p(p-1)$ unités, et non de p unités, comme il l'avait affirmé dans son précédent Mémoire; mais aucun pas nouveau n'est fait vers la solution définitive du problème. Poncelet montre cependant qu'un point de rebroussement (dont il n'indique pas l'ordre) abaisse la classe d'au moins trois unités.

C'est à Plücker, déjà connu à cette époque par de belles recherches de Géométrie, qu'il était réservé de donner, en s'appuyant toutefois sur les théorèmes de Poncelet, la solution la plus complète et la plus satisfaisante de la question.

Dans un Mémoire de quelques pages, inséré au *Journal de Crelle* (t. XII, p. 105), Plücker ajoute au théorème de Poncelet sur le points doubles le suivant :

Tout point *double de rebroussement* abaisse la classe de trois unités.

D'après cela, dit-il, étant donnée la courbe la plus générale du degré m, cette courbe a un nombre de points d'inflexion $M = 3m(m-2)$, et un nombre de tangentes doubles $N = \frac{1}{2}m(m-2)(m^2-9)$.

La courbe polaire réciproque, du degré $m(m-1)$ aura donc M points de rebroussement correspondant aux M points d'inflexion et N points doubles correspondant aux tangentes doubles de la proposée. Sa classe qui devait être

$$\frac{1}{2}m(m-1)\left[\frac{1}{2}m(m-1)-1\right],$$

se réduit donc de $2N+3M$ unités et redescend ainsi à m.

Dans le cas de $m=3$, la réduction provient des points d'inflexion de la proposée, qui sont au nombre de 9.

Dans le cas de $m=4$, elle provient des 24 points d'inflexion et des 28 tangentes doubles de la courbe du quatrième degré. Et ainsi de suite.

Plücker n'indique pas ici comment il avait trouvé le nombre N des tangentes doubles, et le nombre M des points d'inflexion. Mais ses publications postérieures nous permettent de combler cette lacune. Il avait déterminé, par une analyse directe et rigoureuse, le nombre M des points d'inflexion; quant au nombre N des tangentes doubles, il l'avait déduit de l'explication même du paradoxe signalé par Poncelet, en écrivant que $2N+3M$ est égal à la réduction connue *a priori*

$$\frac{1}{2}m(m-1)\left[\frac{1}{2}m(m-1)-1\right]-m$$

de la classe de la polaire réciproque.

C'est Jacobi qui a donné des démonstrations directes, à la fois pour le nombre des tangentes doubles et celui des points d'inflexion, dans un beau Mémoire du *Journal de Crelle* (t. XL, *Beweis des Satzes, dass eine Curve n Grades im Allgemeinen* $\frac{1}{2}n(n-2)(n^2-9)$ *Doppeltan-*

genten hat). Jacobi, toutefois, dans le préambule de son Mémoire, nous paraît avoir été injuste pour Plücker. Certainement Poncelet avait, avec une grande sagacité, reconnu la réduction de la classe, due aux points multiples, mais il n'avait pas su faire disparaître les difficultés moins grandes qui restaient à surmonter, et, malgré tous ses efforts, il n'avait pu, comme il le reconnaissait lui-même (*), donner une solution complète de la question que, le premier, il avait posée aux géomètres.

C'est dans la *Théorie des courbes algébriques* (**) publiée en 1839, à Bonn, que Plücker a réuni (p. 209) tous les résultats qu'il avait trouvés sur les points singuliers et donné pour la première fois d'une manière complète les formules qui lient entre elles les singularités. Soient

n l'ordre d'une courbe ou la classe de sa polaire;
m sa classe ou l'ordre de la polaire;
x le nombre de ses points doubles, ou des tangentes doubles de la polaire;
y le nombre de ses points de rebroussement, ou des points d'inflexion de la polaire;
u le nombre de ses tangentes doubles, ou des points doubles de la polaire;
v le nombre de ses points d'inflexion, ou des points de rebroussement de la polaire.

Les singularités que nous venons de signaler sont celles qu'on appelle *ordinaires*, parce qu'elles se trouvent toujours sur une courbe ou sur sa polaire. Cela posé, on aura, entre les nombres qui précèdent, les relations suivantes, dont *trois* seulement sont distinctes :

(1) $$m = n(n-1) - 2x - 3y,$$
(2) $$n = m(m-1) - 2u - 3v,$$
(3) $$v = 3n(n-2) - 6x - 8y,$$
(4) $$y = 3m(m-2) - 6u - 8v,$$

(*) Dans son *Mémoire sur la Théorie des Polaires réciproques* déjà cité.

(**) PLÜCKER (D[r] Julius) : *Theorie der algebraischen Curven gegründet auf eine neue Behandlungsweise der analytischen Geometrie.* Mit einer Tafel. Bonn, Adolph Marcus, 1839.

(5) $$u = \frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9) - (2x+3y)[n(n-1)-6] + 2x(x-1) + \frac{9}{2} y(y-1) + 6xy,$$

(6) $$x = \frac{1}{2} m(m-2)(m^2-9) - (2u+3v)[m(m-1)-6] + 2u(u-1) + \frac{9}{2} v(v-1) + 6uv.$$

Ces relations présentent bien, prises deux à deux, la symétrie qu'exige le principe de dualité et leur ensemble n'est pas altéré, si l'on échange les singularités de la courbe avec celles de la polaire. Plücker les démontre toutes directement, et trouve ainsi dans leur accord une vérification de ses raisonnements. En les combinant, on obtient les deux relations simples

(7) $$m - n = \frac{1}{3}(v - y),$$

(8) $$(m-n)(m+n-9) = 2(u-x), \text{ etc., etc.}$$

Elles se déduisent toutes, d'ailleurs, des trois premières. Enfin on peut les retrouver très-simplement en se rappelant les deux principes suivants, dont elles sont la traduction :

1° Tout point double abaisse la classe de 2 unités, et tout point double de rebroussement de 3 unités ;

2° Tout point double diminue de 6, et tout point de rebroussement de 8 unités, le nombre des points d'inflexion, qui en général est égal à $3n(n-2)$.

Les formules qui précèdent constituaient une découverte très-importante, elles donnaient un exemple de relations numériques entre des nombres qu'on aurait pu croire indépendants. C'était là un fait tout nouveau en Analyse ; ces relations ouvraient la voie à tout un ordre de recherches importantes dans lequel Plücker a été suivi et imité par un grand nombre de géomètres.

Pourtant, on fit d'abord quelque difficulté d'attribuer ces formules à Plücker ; Steiner les appelait les *formules connues* (*) : il y avait là une injustice, réparée promptement par les savants qui ont donné

(*) *Voir*, par exemple, un Mémoire inséré au tome XVIII du *Journal de M. Liouville*, p. 309, où Steiner donne les formules sans citer Plücker.

aux relations précédentes le nom de celui qui les avait découvertes.

Avant de quitter les courbes planes, rappelons que les formules précédentes ne s'appliquent pas aux singularités dites élevées, points triples, tangentes multiples, etc., etc. C'est M. Cayley qui, le premier, dans un Mémoire inséré au *Quarterly Journal*, t. VII, a résolu cette difficile question et montré que toute singularité élevée peut s'évaluer au moyen d'un certain nombre de singularités ordinaires (*). Ainsi, un point multiple pourra, dans les formules, se remplacer, par exemple, par seize points doubles, un point d'inflexion, cinq points de rebroussement, six tangentes doubles, etc. On pourra consulter aussi, à ce sujet, un Mémoire de M. de la Gournerie dans le *Journal de M. Liouville*, décembre 1869 et janvier 1870.

C'est encore à M. Cayley qu'était réservé l'honneur d'étendre aux courbes gauches les formules de Plücker. Les principaux résultats obtenus par ce savant se trouvent consignés au tome X du *Journal de M. Liouville*, p. 245. Les singularités y sont définies avec beaucoup de clarté, et, au risque de paraître trop long, nous essayerons d'en donner une idée à nos lecteurs.

Une courbe gauche, étant considérée dans l'espace, les plans osculateurs de la courbe enveloppent une surface développable, dont les génératrices rectilignes sont les tangentes à la courbe. Cette surface développable et la courbe forment ce que M. Cayley appelle *un système simple*. Les points de la courbe sont les *points* du système; les génératrices de la surface, tangentes de la courbe, sont les *lignes* du système; enfin les plans tangents de la surface, plans osculateurs de la courbe, sont les *plans* du système.

On appelle *ligne par deux points* une ligne passant par deux points non consécutifs du système; *ligne par deux plans* une ligne située dans deux plans tangents du système. Les expressions *point dans deux lignes* (du système) et *plan par deux lignes* s'expliquent de la même manière.

Les *lignes par deux points* sont, on le voit, des sécantes doubles de la courbe. Si un observateur avait l'œil placé en un de leurs points, deux branches de courbe paraîtraient se couper dans la direction de la ligne. C'est ce qu'on appelle un *point double apparent*. Ces lignes

---

(*) *Voir* aussi *Journal de M. Borchardt*, une *Note sur les singularités supérieures des courbes planes*; t. LXIV, p. 369.

sont aussi les arêtes doubles des cônes ayant leur sommet en un de leurs points et contenant la courbe.

La *ligne dans deux plans* est l'intersection de deux plans tangents à la surface développable ; c'est donc une tangente double de la surface développable.

Le *point dans deux lignes* se trouve sur deux génératrices de la développable ; il est donc sur la *ligne double* de cette surface.

Enfin, le *plan par deux lignes* contenant deux tangentes à la courbe est un plan tangent double pour les cônes passant par la courbe et ayant leur sommet dans ce plan.

Désignons par

m l'ordre de la courbe, c'est-à-dire le nombre de points qu'elle a dans un plan quelconque ;

r le nombre de lignes du système rencontrant une droite, c'est-à-dire l'ordre de la surface développable ;

n le nombre de plans du système passant par un point, c'est-à-dire la classe de la surface développable.

Voici les singularités considérées par M. Cayley :

Quand quatre points consécutifs du système, ou trois lignes consécutives, sont dans un même plan, il y a deux plans consécutifs identiques. On dit qu'il y a un *plan stationnaire.* Soit

α le nombre des plans stationnaires.

Cette singularité corrrespond à l'inflexion dans les courbes planes.

Si quatre plans consécutifs, ou trois lignes consécutives, se rencontrent en un même point, c'est-à-dire si deux points consécutifs deviennent identiques, on dit qu'il y a un *point stationnaire.* Cette singularité correspond au rebroussement. Soit

β le nombre des points stationnaires.

Les autres singularités correspondent aux points doubles et aux tangentes doubles. Leur définition était indiquée par les méthodes de démonstration de M. Cayley. Soient :

g le nombre des *lignes en deux plans* qui passent en un point, c'est-à-dire des tangentes doubles qu'on peut mener du point à la surface développable ;

h le nombre des *lignes par deux plans* passant en un point, c'est-à-dire le nombre des *points doubles apparents* pour un observateur placé d'une manière quelconque ;

x le nombre de *points en deux lignes* contenus dans un plan, c'est-à-dire l'*ordre de la ligne double* de la surface développable;

y le nombre de plans par deux lignes passant en un point, c'est-à-dire de plans tangents doubles du cône contenant la courbe et ayant son sommet en ce point.

Il suffit, pour obtenir les relations entre les neuf éléments que nous avons successivement définis, d'appliquer les formules de Plücker à une section plane de la développable et à un cône contenant la courbe. On trouve ainsi :

$$n = r(r-1) - 2x - 3m,$$
$$r = n(n-1) - 2g - 3\alpha,$$
$$\alpha = 3r(r-2) - 6x - 8m,$$
$$m = 3n(n-2) - 6g - 8\alpha,$$

et

$$r = m(m-1) - 2h - 3\beta,$$
$$m = r(r-1) - 2y - 3n,$$
$$n = 3m(m-2) - 6h - 8\beta,$$
$$\beta = 3r(r-2) - 6y - 8n.$$

Par exemple, pour la cubique gauche, on a le système suivant de valeurs :

m	n	r	α	β	g	h	x	y
3	3	4	0	0	1	1	0	0.

Ces formules si importantes de Plücker et de M. Cayley ont déjà rendu de grands services. Elles ont permis d'abord de diviser les courbes en *genres*, d'après la nature de leur *déficient*, chacun des genres répondant à une classe de fonctions abéliennes, comme l'ont montré Riemann et M. Clebsch. Il y a là un champ étendu de recherches qui a déjà fourni une ample moisson de belles découvertes.

Les recherches de M. Clebsch sont exposées dans le *Journal de M. Borchardt*, t. LXIV, p. 98. Comme ces recherches complètent celles de Plücker, et offrent dans un grand nombre de questions un secours tout à fait inattendu, il est bon que nous en disions ici quelques mots.

Dans un Mémoire antérieur (*), M. Clebsch avait déjà trouvé d'importantes relations entre la théorie des courbes algébriques et celle des fonctions abéliennes. D'après ces travaux, les courbes algébriques se divisent non plus d'après leur ordre, ni d'après leur classe, mais d'après *la classe de fonctions abéliennes* dont dépend leur théorie. C'est le nombre

$$p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - x - y = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - u - v,$$

appelé aussi *déficient*, qui détermine le *genre* de la courbe.

Par exemple, les courbes du troisième ordre les plus générales, les courbes du quatrième ordre à deux points doubles, du cinquième ordre à cinq points doubles, etc., etc., appartiennent au même genre. On a pour toutes $p = 1$. Leur théorie dépend d'ailleurs des fonctions elliptiques, comme l'a montré M. Bertrand dans son *Traité de Calcul intégral*, p. 612.

Le *genre* dépend, on le voit, à la fois du degré de la courbe et du nombre des points singuliers. Inversement, si le genre était connu *a priori*, on aurait une équation nouvelle entre les singularités, et il suffirait de connaître deux d'entre elles pour déterminer toutes les autres. Ainsi, toutes les fois qu'on connaîtra le genre d'une courbe, il ne sera plus nécessaire de connaître trois singularités pour avoir toutes les autres : deux suffiront.

Il y a précisément un théorème très-important dû à M. Clebsch, et qui permet, dans un grand nombre de cas, d'assigner le genre de la courbe : Toutes les fois que deux courbes se correspondent de manière qu'à un point de l'une corresponde un seul point ou une seule tangente de l'autre, les deux courbes seront du même genre; pour elles p prendra la même valeur.

Prenons, par exemple, une courbe et sa développée : d'après le théorème précédent, ce sont deux courbes du même déficient. Or on trouve facilement que la classe de la développée m' est égale à

$$n^2 - 2x - 3y,$$

et que le nombre u' de ses points d'inflexion est égal au nombre y des points de rebroussement de la proposée. Cela suffit pour la détermination de toutes les autres singularités.

(*) *Journal de M. Borchardt*, t. LXIII, p. 189.

Pour les courbes gauches, il y a des théorèmes tout pareils; le genre se détermine d'après la formule

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - h - \beta = \frac{(r-1)(r-2)}{2} - y - n$$
$$= \frac{(r-1)(r-2)}{2} - x - m = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - g - \alpha.$$

C'est encore grâce aux formules de M. Cayley que M. Salmon a pu édifier une théorie et une classification très-rationnelle des courbes gauches algébriques. Mais pour ces détails nous renverrons aux Ouvrages si clairs du savant auteur.

Les recherches et les résultats qui précèdent présentent un ensemble très-satisfaisant pour les amis de la Géométrie; mais les progrès de la science réclamaient une étude plus approfondie. Cette étude a été commencée par les travaux de MM. Cayley, Salmon, Spottiswoode et de quelques autres géomètres. Dans son intéressant Mémoire, M. Zeuthen, de Copenhague, jeune géomètre déjà bien connu par plusieurs travaux, a beaucoup ajouté à ce que l'on savait déjà sur la question; il a repris l'étude des singularités ordinaires, mais il en a distingué un plus grand nombre que M. Cayley.

Il est, en effet, bien facile de voir que les singularités d'une courbe gauche sont en nombre *illimité*. Considérons par exemple la surface développable formée par les tangentes de cette courbe gauche. Cette surface a, en général, une ligne double, dont nous avons désigné l'ordre par x. Voilà donc une nouvelle courbe dérivée de la première, dont on peut rechercher toutes les singularités. Sa classe, par exemple, a déjà été donnée par M. Salmon (*Geometry of three dimensions*, 2e édit., p. 460). De cette deuxième courbe, on peut faire dériver une troisième, et ainsi de suite. De même, considérons la surface enveloppée par les plans tangents doubles de la courbe primitive, on aura un nouveau système dérivé. Enfin, les droites, rencontrant *trois* fois la courbe proposée, forment une surface gauche dont un certain nombre de génératrices rencontrent quatre fois la courbe, etc., etc.

Le Mémoire dont nous rendons compte contient les plus intéressants et les plus importants des nombres que l'on doit déterminer. M. Zeuthen a d'ailleurs égard à trois singularités qui n'avaient pas été introduites par M. Cayley. Ce sont : 1° les *points doubles réels*, dont il désigne le nombre par H; 2° les *plans biosculateurs* (plans tan-

gents doubles de la développable), dont il désigne le nombre par G, et 3° les *tangentes d'inflexion* (droites passant par trois points consécutifs de la courbe, ou situées sur trois plans consécutifs de la développable), dont le nombre est supposé égal à v. De telles singularités n'existent pas évidemment dans toutes les courbes, ni dans leurs polaires. Par exemple, un plan osculateur ne dépendant que d'un paramètre, il est impossible, en général, que le plan reste le même pour deux valeurs différentes du paramètre. Les singularités de cette nature sont distinguées par la dénomination d'*extraordinaires* ou *élevées*.

En tenant compte de ces singularités, les formules de M. Cayley doivent être remplacées par les suivantes :

$$r = m(m-1) - 2h - 2H - 3\beta,$$
$$m = r(r-1) - 2y - 3n - 3v,$$
$$n + v - \beta = 3(r-m),$$

et

$$r = n(n-1) - 2g - 2G - 3\alpha,$$
$$n = r(r-1) - 2x - 3m - 3v,$$
$$m + v - \alpha = 3(r-n).$$

Le premier point traité par M. Zeuthen est le suivant : les formules de M. Cayley déterminent, par exemple, les singularités du cône passant par la courbe et ayant son sommet en un *point quelconque* de l'espace. Mais si le sommet du cône se trouve sur une tangente de la courbe, sur la courbe, à un point double, stationnaire, sur une tangente d'inflexion, en un point d'inflexion, et, comme l'a fait du reste remarquer M. Cayley, les formules ne s'appliquent plus, de nouvelles recherches sont nécessaires. De même, pour une section plane de la surface développable; si le plan de la section contient une tangente simple ou une tangente d'inflexion, s'il est tangent à la développable, les nombres déterminés pour le cas général doivent être modifiés. Deux tableaux très-complets, placés au commencement du Mémoire, indiquent toutes ces modifications.

Voici maintenant quelques-uns des nombres déterminés par M. Zeuthen :

Classe de la courbe double de la développable

$$2g + r(n-2) - n(n-1).$$

Nombre des droites qui rencontrent deux droites fixes et deux fois la courbe proposée

$$h + \frac{m(m-1)}{2};$$

Nombre des tangentes doubles à la développable qui rencontrent deux droites fixes

$$g + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Ordre de la surface gauche formée par les droites qui rencontrent trois fois la courbe

$$(m-2)\left[h - \frac{m(m-1)}{6}\right].$$

Nombre des tangentes de la courbe qui la rencontrent encore une fois

$$r(m-4) + 4h - 2m(m-3) - 3v.$$

La méthode de M. Zeuthen est fondée sur le beau principe de correspondance de M. Chasles. La grande difficulté que rencontre ici l'application de ce principe consiste dans le degré de multiplicité des solutions. M. Zeuthen est, on le sait, très-habile dans ce genre de recherches; il a soin d'ailleurs de contrôler ses résultats en variant les démonstrations. Ses recherches paraissent donc, quelque délicate que soit la méthode, de nature à inspirer une entière confiance aux géomètres.

Nous avons essayé, dans cet article, de donner à nos lecteurs, une idée des progrès accomplis depuis cinquante ans, dans la théorie de l'élimination et en un point très-important de la théorie des courbes de degré supérieur. Nous ne dirons rien, pour aujourd'hui, des questions toutes semblables qu'on peut se proposer pour les surfaces, et qui sont bien près d'être résolues.

Nous nous estimerions heureux si les lignes qui précèdent attiraient l'attention de quelques géomètres sur ces questions trop négligées en France, où l'on est porté à considérer la Géométrie synthétique et analytique comme une science d'ordre inférieur. A notre humble avis, c'est aux progrès mêmes de cette Géométrie que sont subordonnés les développements ultérieurs du véritable Calcul infinitésimal, c'est-à-dire de la théorie des différentielles algébriques,

des fonctions elliptiques et abéliennes. Aux branches nouvelles de la science, créées depuis le commencement du siècle, doit correspondre aussi un enseignement nouveau, réclamé par les progrès accomplis et venant se placer à côté de l'ancien, sans lui nuire et sans en diminuer la valeur. Nos élèves, préparés par les études sérieuses des Mathématiques spéciales, suivraient avec goût et avec fruit des études dont ils n'auraient plus à surmonter les premières difficultés.

G. D.

GIORNALE di Matematiche, ad uso degli studenti delle Università italiane, pubblicato per cura del professore G. Battaglini (*).

T. VII; 1869

D'Ovidio (E.). — *Nouvelle exposition de la théorie générale des courbes du deuxième ordre en coordonnées trilinéaires.* (16 p.; ital.)
Suite d'un article précédent.

Jadanza (N.). — *Sur les progressions à deux et à trois différences.* Suite d'un article précédent. (7 p.; ital.)

Jadanza (N.). — *Sur les progressions.* (14 p.)
Progressions à n différences, etc.

Sardi (C.). — *Théorèmes d'Arithmétique.* (4 p.; ital.)
Théorèmes relatifs aux fractions décimales périodiques.

Janni (V.). — *Décomposition d'une équation du quatrième degré entre deux variables en deux facteurs rationnels du deuxième degré.* (ital.)

Vecchio (A.). — *Sur les équations transcendantes.*
Équations $\cosh ml . \cos ml = \pm 1$.

Vecchio (A.). — *Sur les proportions et les progressions.* (7 p.; ital.)

(*) *Journal de Mathématiques à l'usage des étudiants des Universités italiennes,* publié sous la direction du professeur Jos. Battaglini. Naples, B. Pellerano, éditeur. Paraissant tous les deux mois par fascicules de 4 feuilles, in-4°. Fondé en 1863. Prix : 14 fr. pour l'Italie, 20 fr. pour la France. (En italien et en français.)

Battaglini (G.). — *Sur les systèmes de droites du second degré.* (26 p.; ital.)

Suite d'un autre article. Ce travail se rapporte aux belles études de Plücker sur les complexes, dont nous avons rendu dernièrement un compte détaillé.

Trudi (N.). — *Sur la détermination des constantes arbitraires dans les intégrales des équations différentielles et aux différences finies.* (21 p.; ital.)

Sur une erreur commise par Lagrange dans un Mémoire de 1775 (t. IV, p. 151, des OEuvres complètes publiées par M. Serret), et reconnue par lui en 1792.

Iung (G.) et Armenante (A.). — *Sur une équation du huitième degré.* (7 p.; ital.)

Bertini (E.). — *Nouvelle démonstration de ce théorème : deux courbes corrélatives projectivement sont du même genre.* (ital.)

D'Ovidio (E.). — *Note sur deux théorèmes de M. Mannheim.* (ital.)

Sardi (C.). — *Sur les sommes des diviseurs des nombres.* (ital.)

Besso (D.). — *De l'idée de fonction dans l'enseignement de la Géométrie élémentaire.* (5 p.; ital.)

Grosso (R. del). — *Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes.* (2 art., 32 p.; ital.)

Bustelli (A.-M.). — *Détermination analytique des centres de pression des surfaces immergées dans un liquide homogène pesant.* (2 art., 16 p.; ital.)

Zannotti (M.). — *Leçons sur la Thermodynamique.* (2 art., 32 p.; ital.)

Calzolari (L.). — *Nouvelle solution générale en nombres rationnels de l'équation* $W^2 = a + bv + cv^2$. (16 p.; ital.)

Besso (D.). — *Sur l'intégrale* $\int_0^\beta \frac{\sin^m x}{x}\, dx$. (ital.)

Armenante (A.) et Iung (G.). — *Résumé des leçons complémen-*

taires faites à l'Institut Technique supérieur de Milan. (11 p.; ital.)

Cours de MM. Brioschi, Cremona et Casorati. Fonctions elliptiques. Théories de Clebsch et Gordan, et de Riemann sur les fonctions abéliennes.

IUNG (G.) et ARMENANTE (A.). — *Sur les transformations birationnelles ou univoques* (eindeutigen), *et sur les courbes normales et sous-normales du genre p.* (19 p.; ital.)

SARDI (C.). — *Sur quelques séries; applications à l'arithmétique.* (56 p.; ital.)

CALZOLARI (L.). — *Solution générale de l'équation*

$$y^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2.$$

(4 p.; ital.)

CALZOLARI (L.) — *Recherche des valeurs rationnelles de v qui rendent le polynôme* $a + bv + cv^2 + dv^3 + ev^4$ *un carré parfait.* (33 p.; ital.)

CASSANI (P.). — *Étude sur la conique des neuf points et des neuf droites.* (5 p.; ital.)

GRANDI (A.). — *Sur une formule connue qui peut se déduire d'un théorème de Cauchy.* (ital.)

VALERIANI (V.). — *Du plan, sa définition. Axiome du plan élevé au rang de théorème.* (ital.)

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE SCIENCES, publiés par MM. les Secrétaires perpétuels (*).

N° 11. Séance du 14 mars 1870.

M. FAYE. — *Sur l'observation photographique des passages de Vénus et sur un appareil de M. Laussedat.*

M. PHILLIPS. — *Note sur les changements d'état d'un mélange d'une vapeur saturée et de son liquide, suivant une ligne adiabatique.*

N° 12. Séance du 21 mars 1870.

M. MOUTIER. — *Sur l'angle de raccordement d'un liquide avec une paroi solide.*

(*) Voir *Bulletin*, p. 63.

M. Chasles fait connaître un *Théorème concernant la théorie des surfaces de M. Spottiswoode.*

« On sait que, par un point d'une surface, on peut mener deux tangentes qui ont avec elle un contact du deuxième ordre, c'est-à-dire trois points consécutifs communs avec la surface. C'est un des beaux théorèmes dus à M. Dupin, et qui se retrouve, depuis lors, dans toutes les recherches des géomètres. Les deux tangentes dont il s'agit sont les asymptotes de l'indicatrice de la surface. Passant de la ligne droite aux sections coniques, M. Spottiswoode s'est proposé de rechercher combien on peut tracer sur une surface, en chaque point, de coniques ayant un contact du cinquième ordre, c'est-à-dire six points communs avec la surface. Il a trouvé que ces coniques sont au nombre de dix, réelles ou imaginaires. »

Nous pensons que M. Spottiswoode a voulu parler des contacts du sixième ordre, c'est-à-dire des coniques ayant sept points communs avec la surface. Menons, en effet, par un point A d'une surface un plan quelconque. Nous pourrons construire, dans ce plan, une conique ayant en A avec la surface cinq points communs, c'est-à-dire un contact du quatrième ordre. Pour que l'ordre du contact s'élève d'une unité, il suffit que les coefficients angulaires du plan satisfassent à une relation, c'est-à-dire que le plan enveloppe un cône. Mais, si l'on veut que le contact soit du sixième ordre, on trouve alors deux relations qui doivent déterminer un nombre limité de plans (*).

N° 13. Séance du 28 mars 1870.

M. Darboux. — *Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre.*

M. Tisserand. — *Sur un point du calcul des différences.*

« Dans un de ses Mémoires, Lagrange a montré comment, dans certains cas, d'une relation entre les dérivées d'une fonction et ses différences, on peut déduire aisément une relation nouvelle entre les intégrales successives de la fonction, et ses différences et intégrales finies. Le but de cette Note est d'en montrer des exemples intéressants, à propos des formules de quadrature en usage parmi les astronomes. »

(*) Voir *Comptes rendus*, t. LXII, 1866, p. 590.

Nous ajouterons à cette courte explication une remarque. C'est que, dans les cas particuliers fort importants signalés par M. Tisserand, on peut employer des procédés de démonstration à l'abri des reproches qu'on pourrait adresser justement à l'Analyse de Lagrange (*).

N° 14. Séance du 4 avril 1870.

M. DE SAINT-VENANT. — *Recherche d'une deuxième approximation dans le calcul rationnel de la poussée exercée contre un mur dont la face postérieure a une inclinaison quelconque, par des terres non cohérentes, dont la surface supérieure s'élève en un talus plan quelconque à partir du haut de cette face du mur.*

M. OLTRAMARE. — *Sur l'existence d'une loi de répartition analogue à la loi de Bode (ou de Titius), pour chacun des systèmes de satellites de Jupiter, de Saturne et d'Uranus.*

M. R. WOLF. — *Études sur la fréquence des taches du Soleil et sa relation avec la variation de la déclinaison magnétique.*

M. ZEUTHEN. — *Sur les points fondamentaux de deux surfaces, dont les points se correspondent un à un.*

Cette Note de M. Zeuthen se rapporte à un des points les plus importants et les plus récemment découverts de la théorie des surfaces algébriques. Cette question des points fondamentaux mérite plus de quelques lignes, et nous aurons l'occasion d'y revenir. Le travail de M. Zeuthen est, croyons-nous, avec ceux de M. Cremona, un des premiers essais d'étude géométrique de la nouvelle théorie.

M. DARBOUX. — *Sur la théorie des équations aux dérivées partielles.*

M. E. DIDON. — *Sur un mode d'approximation des fonctions de plusieurs variables.*

Dans la théorie des erreurs on est conduit à résoudre le problème suivant :

Étant donnée une fonction $f(x)$, trouver, parmi tous les polynômes P de degré m, celui qui, entre les limites -1 et $+1$, s'approche le plus de la fonction donnée, c'est-à-dire qui rend minimum

(*) Voir *OEuvres complètes*, publiées par M. SERRET, t. III, p. 44.

l'intégrale

$$\int_{-1}^{+1} [f(x) - \mathrm{P}]^2 dx.$$

On sait que le polynôme P qui fournit la solution de ce problème est représenté par la partie du développement de $f(x)$ suivant les fonctions X_n de Legendre qui s'arrête au terme X_{m+1}. M. Didon s'est proposé, pour les fonctions à plusieurs variables, un problème analogue qu'on peut énoncer ainsi :

Étant donnée une fonction $f(x, y, z, \ldots)$, trouver, parmi tous les polynômes P de degré m, celui qui rend minimum l'intégrale

$$\int\int\int [f(x, y, z, \ldots) - \mathrm{P}]^2 dx\,dy\,dz\ldots,$$

dans laquelle les variables sont assujetties à la condition

$$x^2 + y^2 + z^2 + \ldots \leq 1.$$

M. Boussinesq. — *Intégration de l'équation différentielle qui peut donner une deuxième approximation, dans le calcul rationnel de la poussée exercée contre un mur par des terres dépourvues de cohésion.*

M. Chapelas. — *Recherches sur les centres de moyenne position des étoiles filantes.*

N° 15. Séance du 11 avril 1870.

M. Flammarion. — *Loi du mouvement de rotation des planètes.*

La loi énoncée par l'auteur serait intéressante si elle était exacte.

M. Decharme. — *Aurore boréale observée à Angers.*

M. Le Verrier. — *Présentation de Notes diverses relatives à l'aurore boréale du 5 avril et adressées par MM. Tremeschini, Charault, Terby, Geslin, Guerreau, Fortier-Garnier, Gramant, Lepingard, etc.*

PAINVIN (L.), professeur de Mathématiques spéciales au Lycée de Lyon. — Discussion de l'intersection de deux surfaces du second ordre (*).

On sait que les couples de droites passant par l'intersection de deux courbes du second degré se déterminent au moyen d'une équation

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. VII, 1868, 103 p.

du troisième degré, dont la discussion complète est faite dans tous nos cours de Mathématiques spéciales. Les professeurs examinent les différents cas qui se présentent quand l'équation a des racines simples ou multiples, réelles ou imaginaires. C'est de la même équation que dépend la détermination du triangle conjugué commun aux deux coniques.

Si l'on étudie de même deux surfaces du second degré, on trouve quatre cônes passant par leur intersection, et les sommets de ces quatre cônes sont, d'après un beau théorème dû à Poncelet, les sommets du tétraèdre conjugué commun aux deux surfaces. Mais on n'avait pas encore étudié d'une manière complète l'équation du quatrième degré qui détermine ces quatre cônes. On ne trouve, sur ce point, dans le Traité de M. Salmon (*) qu'une remarque excellente, mais insuffisante : *Quand l'équation a une racine double, les deux surfaces sont en général tangentes, et le cône correspondant à la racine double est celui qui a son sommet au point de contact. Il n'y a pas alors de tétraèdre conjugué commun aux deux surfaces.*

Le Mémoire de M. Painvin a pour but de combler cette lacune. L'auteur s'est proposé d'examiner *tous* les cas qui peuvent se présenter dans la discussion de l'équation du quatrième degré, et d'en déduire chaque fois la nature de la courbe d'intersection des deux surfaces, ses branches réelles, infinies, etc., etc.

Cette discussion présentait le plus grand intérêt à tous les points de vue. Beaucoup de propriétés des surfaces se déduisent, en Géométrie analytique, de la forme commune à laquelle on peut ramener leurs équations. Il était bon de savoir dans quel cas il existe un tétraèdre conjugué commun, et quand ce tétraèdre n'existe pas, quelles sont les formes les plus simples auxquelles on peut ramener les équations. Ce travail nous paraît avoir été fait complétement, et les géomètres qui s'occupent de la théorie des surfaces du second ordre trouveront dans le Mémoire de M. Painvin de très-utiles indications.

G. D.

(*) Voir *Die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes von* G. Salmon, *deutsch bearbeitet von* W. Fiedler; p. 177. Leipzig, B.-G. Teubner.

PAINVIN (L.) — NOTE SUR LA TRANSFORMATION HOMOGRAPHIQUE (*).

Deux figures homographiques peuvent-elles, en général, être amenées, par un déplacement convenablement choisi, à être homologiques? On sait depuis longtemps que cela n'est pas possible. M. Painvin s'est proposé d'établir ce résultat (qui peut-être n'avait pas été démontré d'une manière précise), et de rechercher sous quelles conditions deux figures homographiques peuvent être amenées à être homologiques.

Les conditions auxquelles se trouve conduit l'auteur s'interprètent géométriquement d'une manière très-simple :

Pour que deux figures homographiques de l'espace puissent être placées homologiquement, il faut et il suffit que la courbe qui, dans l'une d'elles, correspond au cercle imaginaire de l'infini appartenant à l'autre, soit également un cercle; et alors il y a deux manières, et deux seulement, d'amener les deux figures à être homologiques.

Le déplacement d'une figure pouvant être considéré comme une transformation homographique, on voit que les recherches précédentes conduisent à se poser la question suivante :

Étant données deux figures homographiques, peut-on, en transformant l'une d'elles homographiquement, l'amener à être homologique à l'autre?

Nous croyons qu'on peut répondre affirmativement, pourvu que la transformation homographique auxiliaire soit convenablement choisie.

G. D.

TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY OF EDINBURGH (**).

T. XV, 1867-69.

CAYLEY (A.). — *Sur les courbes polyzomales ou courbes*

$$\sqrt{U} + \sqrt{V} + \ldots = 0.$$

(110 p.)

$U, V, \ldots$ sont des fonctions homogènes de x, y, z, du même degré r.

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. IX, 1870, 11 p.

(**) *Actes de la Société Royale d'Édimbourg.* — Paraît chaque année, en langue anglaise, par demi-volumes in-4°.

Chacune des courbes $\sqrt{U}=0$, $\sqrt{V}=0,\ldots$, à cause de sa relation de circonscription avec la courbe $\sqrt{U}+\sqrt{V}+\ldots=0$, est considérée comme une ceinture (ζῶμα) de cette courbe, d'où les expressions zome, polyzomal, etc. L'étude des propriétés de ces courbes est développée à partir de la valeur $\nu \gtreqless 3$ du nombre des zomes. Le Mémoire contient des recherches relatives au cas général d'une courbe à ν zomes, à ses branches, à son ordre, à ses singularités, à sa classe, etc.

Brewster (Sir David). — *Sur le mouvement, l'équilibre et les formes des bulles liquides.* (8 p.)

Scott (J.). — *Sur les miroirs comburants d'Archimède, avec quelques propositions concernant la concentration de la lumière, produite par des réflecteurs de différentes formes.* (27 p.)

Discussion historique de l'invention d'Archimède. — Quand la lumière émanant d'une sphère lumineuse de petit diamètre apparent tombe sur un miroir plan très-petit, trouver l'intensité de la lumière réfléchie à une distance quelconque du miroir. — Quand un rayon cylindrique de lumière solaire est réfléchi par un miroir plan, trouver l'intensité sur une surface plane perpendiculaire à la direction du rayon réfléchi et à une distance quelconque du miroir. — Une sphère lumineuse étant placée à l'un des foyers d'un miroir elliptique, trouver l'intensité sur une petite surface plane placée à l'autre foyer. — Les rayons solaires tombant suivant l'axe sur un miroir parabolique, trouver l'intensité sur un petit disque placé au foyer. — L'axe d'un miroir conique étant dirigé vers le Soleil, trouver l'intensité sur un plan perpendiculaire à l'axe. — Cas de deux miroirs coniques, d'axes parallèles et de surfaces parallèles ou perpendiculaires. — Cas de deux miroirs paraboliques confocaux. — On peut aussi facilement construire des surfaces comburantes à la distance de 150, 200 ou 300 pieds qu'à la distance de quelques pouces.

Thomson (Sir William). — *Sur le mouvement en tourbillons.* (44 p.)

La partie mathématique de ce travail a pour but de développer l'hypothèse que l'espace est occupé par un *liquide* incompressible et *sans frottement,* n'étant soumis à l'action d'aucune force, et que les phénomènes matériels de toute sorte dépendent uniquement des mouvements produits dans ce liquide. Par *liquide sans frottement,*

l'auteur entend une masse occupant l'espace d'une manière continue, et dont chaque partie presse sur une autre quelconque, suivant une direction exactement perpendiculaire à la surface de séparation. Ces recherches se rattachent à celles de Helmholtz (*Ueber Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen. Journ. de Crelle*, 1858), en s'appuyant sur les notions introduites par Riemann (*Lehrsätze aus der Analysis situs : Ibid.*, 1857).

Tait. — *Sur la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe.* (44 p.)

Application de la méthode des quaternions à la résolution du célèbre problème. Cette méthode a l'avantage de donner une représentation géométrique aussi claire qu'aucune autre pour les personnes familières avec ce calcul. Elle fournit des calculs d'une parfaite symétrie, ce qui n'est pas le cas des systèmes de coordonnées employés généralement. L'auteur s'est inspiré des travaux de Poinsot, ainsi que des recherches plus récentes de Hamilton, de Cayley, de Sylvester. Ses résultats ont, sur les constructions géométriques de Poinsot, l'avantage de se prêter à la détermination effective de la position du corps au bout d'un temps quelconque. Ce Mémoire se divise en deux Parties : 1° Cinématique d'un système rigide ayant un point fixe; 2° Dynamique d'un corps solide ayant un point fixe.

Jenkin (Fleeming). — *Sur l'application pratique de la théorie des figures réciproques au calcul des efforts des pièces dans la charpente.* (8 p., 6 pl.)

Deux figures planes sont dites *réciproques*, quand elles sont formées d'un même nombre de lignes, de telle sorte que les lignes correspondantes dans les deux figures soient parallèles, et que les lignes correspondantes qui concourent en un même point dans une des figures forment un polygone fermé dans l'autre. Si les forces représentées en grandeur par deux lignes d'une figure sont supposées agir entre les extrémités des lignes correspondantes de la figure réciproque, alors les points de la figure réciproque seront tous en équilibre sous l'action de ces forces.

Smith (W.-Robertson). — *Hegel et la métaphysique du calcul des fluxions.* (20 p.)

L'auteur réfute les critiques des découvertes de Newton, lancées

par Hegel et reproduites par un de ses disciples, le Dr Stirling. Il montre sans peine les nombreuses erreurs commises par le grand métaphysicien, dans une science où la connaissance des détails pratiques est indispensable pour se former des vues d'ensemble. Pour n'en citer qu'un exemple, Hegel reproche à Lagrange d'avoir avancé que, la loi de la chute des corps étant exprimée par $s = at^2$, le cas le plus simple après celui-là, $s = at^3$, ne se trouve pas dans la nature : « Du moins, dit-il, on a la formule $s^3 = at^2$, qui exprime la troisième » loi de Kepler. » Cette assimilation des deux formules de nature si différente peut donner une idée de la valeur de ces critiques, que M. Smith qualifie de *Quixotic attempts.*

Rankine (W.-J. Macquorn). — *Sur l'énergie thermale des tourbillons moléculaires.* (10 p.)

L'auteur part de cette hypothèse, que la chaleur thermométrique consiste dans un mouvement des particules des corps dans des courants circulatoires, avec une vitesse uniforme ou à oscillations périodiques. Cette hypothèse suffit pour arriver à l'équation générale de la Thermodynamique, sans qu'il soit besoin d'introduire aucune autre supposition sur la figure et l'arrangement des tourbillons moléculaires.

MEMOIRS of the Literary and Philosophical Society of Manchester. — Third Series. London, H. Baillière. — Paris, J.-B. Baillière (*).

T. II; 1865.

Cayley (A.). — *Note sur une équation différentielle.*

La plus petite racine de l'équation

$$y = u + ay^n$$

se développe immédiatement par la série de Lagrange. D'ailleurs, le développement de y satisfait à l'équation

$$(u\,\mathrm{D}_u)^{n-1} y = na\left(\frac{n}{n-1}\,\mathrm{D}_u - \frac{2n-1}{n-1}\right)^{n-1} u^{n-1} y,$$

dont on a ainsi une intégrale.

(*) Paraît à époques indéterminées, par volumes in-8°. En langue anglaise.

Thomson (W.). — *Sur l'équilibre convectif de température dans l'atmosphère.*

Il s'agit de l'équilibre produit par le déplacement des molécules de températures diverses.

Kirkman (Th.) — *Sur les groupes non-modulaires.* (23 p.)

Étude relative au nombre de valeurs d'une fonction de plusieurs éléments.

Spottiswoode (W.). — *Sur les résolvantes différentielles.*

Harley (R.). — *Sur une certaine classe d'équations différentielles linéaires.* (14 p.)

D'une équation algébrique quelconque, de degré n, à coefficients fonctions d'une variable, on peut déduire (Cayley, *Philosophical Magazine*, 1861) une équation différentielle linéaire, qui est satisfaite par la plus petite racine de l'équation donnée, dont elle est la *résolvante différentielle* (Boole, *Memoir on a general Method in Analysis: Phil. Trans.*, 1844). Application aux équations

$$y^n - ny + (n-1)x = 0,$$
$$y^n - ny^{n-1} + (n-1)x = 0,$$

auxquelles peuvent se ramener toutes les équations algébriques pour $n \leqq 5$.

Russel (W.-H.-L.). — *Sur la solution de la résolvante différentielle.*

Heelis (Th.). — *Observations sur la lumière zodiacale.* (12 p.)

T. III; 1868.

Brothers (A.). — *Catalogue d'étoiles binaires, avec des remarques préliminaires.* (27 p.)

Knott (G.). — *Sur l'étoile variable* R *du Petit Renard,*

$$\text{Æ} = 20^h 58^m 21^s,9, \quad D = +23^\circ 17',2, \quad \text{ép. } 1865,0.$$

Baxendell (J.). — *Observations sur la nouvelle étoile variable* T *de la Couronne.*

Baxendell (J.). — *Observations sur la pluie météorique du 13-14 nov.* 1866.

MÉLANGES.

Imchenetsky (V.). — *Étude sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes.* — In-8, 160 pages; 1868 (*).

En attendant qu'il nous soit donné de publier la traduction que nous faisons en ce moment de cet important Mémoire, nous croyons être agréable aux lecteurs du *Bulletin* en leur faisant connaître l'Avant-propos, dans lequel l'auteur a exposé l'objet de son travail et l'esprit dans lequel il l'a traité :

« La théorie des équations différentielles présente un ensemble si bien enchaîné, et si rigoureusement logique, que la possibilité de résoudre chaque nouveau problème que l'on rencontre en s'élevant dans cette théorie tient à la manière plus ou moins complète dont on a résolu les problèmes de classe inférieure qui se sont posés précédemment. Cette liaison si étroite entre toutes les parties de la doctrine est un inconvénient, lorsque, dans une certaine catégorie de questions, il se présente des difficultés susceptibles de résister longtemps aux efforts de l'Analyse mathématique; car un arrêt dans le développement d'une seule partie se fait ressentir dans tout le système, dont les portions forment un ensemble organique. Mais cet inconvénient se change en avantage, chaque fois qu'un succès notable est obtenu sur un point quelconque de la théorie; un triomphe remporté sur un obstacle considérable entraîne quelquefois en même temps la chute d'autres obstacles, et imprime une impulsion sensible au développement de la théorie tout entière. C'est ainsi que les récents perfectionnements des méthodes générales d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre ont, d'une part, aidé à la constitution et à l'achèvement de la théorie des équations simultanées de forme canonique, tandis que, d'autre part, ils ont puissamment contribué aux progrès de la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre.

» Une fois la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre définitivement établie, est arrivé naturellement le tour des équations aux dérivées partielles des ordres supérieurs, et c'est vers la solution de ce problème que doivent tendre maintenant les

(*) Extrait des *Mémoires de l'Université de Kazan* pour l'année 1868, t. III.

efforts des géomètres. Par suite de la liaison organique qui existe entre toutes les parties de la théorie des équations différentielles, ainsi qu'entre les subdivisions de chaque partie, il se manifeste une analogie et une unité remarquables dans les méthodes de solution des questions qu'elle embrasse, quelle que soit la diversité de leur nature. Il s'ensuit de là que, lorsque l'analyste rencontre une question dont la solution, poussée déjà jusqu'à un certain point, se trouve arrêtée à cette période de son développement, il doit, avant tout, chercher à se rendre compte du chemin qu'on a suivi pour parvenir jusque-là, surtout quand ce chemin a été frayé par des hommes tels que d'Alembert, Euler, Laplace, Lagrange, Legendre, Monge, Ampère.

» En effet, l'étude consciencieuse de ce qui a été déjà fait peut montrer quelquefois que le succès ultérieur dépend bien moins de l'invention de nouvelles méthodes, que d'une application plus complète et plus générale des méthodes anciennes.

» La théorie de l'intégration des équations aux dérivées partielles des ordres supérieurs se divise en deux parties. Dans la première, on considère les équations de formes compliquées, et l'on cherche soit à déterminer leurs intégrales générales sous forme finie, soit à réduire les équations proposées aux formes les plus simples parmi celles dont les intégrales ne sont pas susceptibles d'expressions finies. Dans la seconde, on s'occupe de ces équations simplifiées et des méthodes par lesquelles on peut les intégrer, à l'aide soit des séries, soit des intégrales définies.

» Dans le présent Mémoire, je traite les questions relatives à chacune des deux parties de la théorie, dans le cas des équations aux dérivées partielles du second ordre d'une fonction de deux variables indépendantes. En donnant le résumé succinct, mais aussi complet que possible, des principales méthodes de résolution des problèmes de cette catégorie, je pense avoir comblé une lacune qui existe dans les Traités systématiques de Calcul intégral. La plupart des auteurs se bornent, en effet, à exposer la méthode de Monge; quelquefois les Ouvrages plus complets contiennent aussi les méthodes d'Euler et de Laplace. Mais aucun, à ma connaissance, ne fait mention des travaux d'Ampère sur ce sujet, publiés dans les Cahiers XVII et XVIII du *Journal de l'École Polytechnique*. Les recherches d'Ampère, qui comprennent la théorie des intégrales et les méthodes d'intégration pour des cas qui échappent à la méthode de Monge, devraient occuper une

place considérable dans tout cours sérieux de Calcul intégral, tandis qu'ordinairement, comme je viens de le dire, on expose la méthode de Monge, quelquefois avec des changements de forme qui ne sont pas toujours heureux. L'oubli dans lequel on laisse le beau travail d'Ampère est dû sans doute en partie au mode de rédaction de ses deux volumineux Mémoires, qui ne se prêtent pas aisément à une exposition succincte; j'ai fait cependant tous mes efforts pour atteindre ce but. J'ai trouvé moyen, dans le courant de mon exposition, d'intercaler les résultats de mes propres recherches à la place indiquée par l'ordre naturel des questions.

» Parmi ces résultats, je me permettrai de signaler un essai de généralisation de la méthode de Laplace (Chap. II, § 9), et une forme nouvelle que j'ai donnée à l'exposition de la méthode de la variation des constantes arbitraires (Chap. IV). Le lecteur familier avec ce sujet ne pourra manquer de reconnaître facilement les passages, moins importants, où je m'écarte de mes auteurs, que j'ai partout cités avec soin dans les Notes au bas des pages. »

J. Hoüel.

COURS DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS PENDANT LE SECOND SEMESTRE.

Calcul différentiel et intégral. — Les lundis et jeudis, à 10 heures. — M. *J.-A. Serret*, professeur, continuera ce cours. Il traitera du Calcul intégral.

Mécanique rationnelle. — Les mercredis et vendredis, à 10 heures. — M. *Liouville*, professeur, continuera ce cours.

Astronomie. — Les lundis et jeudis à $8^h 30^m$. — M. *Le Verrier*, professeur. M. *Tissot*, suppléant, commencera le jeudi 17 mars. Il exposera les lois des principaux phénomènes astronomiques et les méthodes d'observation.

Cacul des probabilités et Physique mathématique. — Les mardis et samedis, à $10^h 30^m$. — M. ***, professeur. M. *Briot*, suppléant, continuera ce cours le samedi 19 mars. Il exposera les principes de la théorie des fonctions elliptiques, dont il fera ensuite l'application à diverses questions de Physique mathématique.

Mécanique physique et expérimentale. — Les mardis et samedis

à $8^h 30^m$. — M. *Delaunay*, professeur. M. *Bouquet*, suppléant, continuera ce cours, le samedi 19 mars. Il traitera des questions de Mécanique physique comprises dans le programme de la Licence (*).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Borsendorff. — Petites tablettes chronométriques, à l'usage de tout le monde. Guide pour choisir, diriger et régler soi-même les montres et les pendules, suivi d'un aperçu historique sur l'origine et les progrès de l'art de mesurer le temps. 2e édition. In-32, 64 p. Paris, l'auteur, 1, rue de Vannes. 60 c.

Bruhns (C.). — Neues logarithmisch-trigonometrisches Handbuch auf 7 Decimalen. Ster.-Ausg. Lex.-8. Leipzig, B. Tauchnitz. 1 $\frac{1}{4}$ Thlr.

Bruhns (C.). — Nouveau Manuel de logarithmes à 7 décimales pour les nombres et les fonctions trigonométriques. Édit. stér. Gr. in-8°. Leipzig, B. Tauchnitz. 1 $\frac{1}{3}$ Thlr.

Bruhns (C.). — A new Manual of Logarithms to seven places of decimals. Ster. edit. Lex.-8. Leipzig, B. Tauchnitz. 1 $\frac{1}{3}$ Thlr.

Bozzo (Em.). — Lezioni di nautica con l'aggiunta di un manuale di navigazione pratica del Rio de la Plata. In-8, 142 p. Genova, tip. del Commercio. 3 fr.

Catalan (E.). — Manuel d'Arithmétique et d'Algèbre, rédigé d'après les nouveaux programmes officiels d'enseignement des lycées impériaux, prescrits pour les examens du baccalauréat. 7e édit. In-12, VI-236 p. Paris, Delalain et fils. 2 fr.

Delaunay (Ch.). — Cours élémentaire d'Astronomie. 5e édit., avec 3 pl. et 381 figures dans le texte. In-18 jésus, 664 p. Paris, Masson et fils. 7 fr. 50 c.

Dürr (L.). — Zweck und Anwendung des Charto-Metre. Gr. in-16. Mit Charto-Metre. München, Ackermann. $\frac{1}{4}$ Thlr.

Ferguson (James). — Life of James Ferguson, the self-taught astro-

(*) Nous ne donnons que la liste des Cours de Mathématiques; les Cours de Géométrie et d'Algèbre supérieure ne se font que pendant le premier semestre. Les cours du second semestre ont commencé le 16 mars.

nomer; in a brief autobiographical account, and further extended Memoir. By Eb. Henderson. 2^{d} edit., with additions, 8°, 512 p. London, Fullarton. 8 sh.

Frauenholz (A.). — Die Sonne und ihre Achsendrehung. In-8. Breslau, Gosohorsky. $\frac{1}{6}$ Thlr.

Gasser (A.). — Leitfaden für den Unterricht in der Planimetrie. 2. Aufl. Gr. in-8. Frankfurt a. M., Jäger'sche Buchh. $\frac{2}{3}$ Thlr.

Gasser (A.). — Leitfaden für den praktischen Unterricht in der Raumlehre. Dritte mit Rücksicht auf die neuen Maass- u. Gewichtsverhältnisse umgearb. 2. Aufl. Gr. in-8. Frankfurt a/M., Jäger'sche Buchh. $\frac{2}{3}$ Thlr.

Gerlach (H.).— Lehrbuch der Mathematik für den Schul- und Selbstunterricht. 4. Thl. 2. Aufl. In-8. Dessau, Aue. $\frac{1}{2}$ Thlr.

Girdlestrone (W.-H.). — Arithmetic; theoretical and practical. 2^{d}. ed. revised and enlarged. Post 8°, 470 p. London, Rivingtons. 6 sh. 6 d.

Guarnieri (A.). — Lezioni di Aritmetica, Algebra, Geometria e Trigonometria, compilate secondo i programmi ministeriali per le scuole speciali e per l'ammissione alla Scuola superiore di guerra. In-8, 568 p. con 11 tav. Firenze, Pellas. 15 fr.

Haller v. Hallerstein (F.). — Lehrbuch der Elementar-Mathematik. 2 Theile. 7. Aufl. Gr. in-8. Berlin, Nauck et Co. 2 Thlr. 16 Ngr.

Hansen (P.-A.). — Bestimmung der Sonnenparallaxe durch Venusvorübergänge vor der Sonnenscheibe mit besonderer Berücksichtigung des im Jahr 1874 eintretenden Vorüberganges. Hoch-4. Leipzig, Hirzel. 1 Thlr.

Helmes (J.). — Die Elementar-Mathematik nach den Bedürfnissen des Unterrichts streng wissenschaftlich dargestellt. 4. Bd. Die Stereometrie und sphärische Trigonometrie. Gr. in-8. Hannover, Hahn. 26 Ngr.

Henrich (F.). — Lehrbuch der Arithmetik und Algebra mit zahlreichen Aufgaben und Anwendungen für Gymnasien, Realschulen und zum Selbstunterrichte. Gr. in-8. Wiesbaden, Limbarth. 24 Ngr.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

CHRISTOFFEL (E.-B.), corresp. Mitglied der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. — ALLGEMEINE THEORIE DER GEODAETISCHEN DREIECKE. Aus den Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1868. — Berlin, Buchdruckerei der Königlichen Akademie der Wissenschaften (C. Vogt), 1869. In Commission bei F. Dümmlers Verlags-Buchhandlung (*).

On doit regarder ce beau Mémoire comme marquant un progrès considérable dans cette Géométrie des surfaces courbes, une des plus belles créations de Gauss, suivant laquelle ces surfaces sont considérées « *non tamquam limes solidi, sed tamquam solidum, cujus dimensio una pro evanescente habetur, flexibile quidem, sed non extensibile,* » et qui, laissant de côté les propriétés qui se rapportent à telles ou telles formes qu'elles prennent dans l'espace, ne s'occupe que de celles qui « *absolutæ sunt, atque invariatæ manent, in quamcumque formam illa flectatur.* » (Gauss, à l'art. XIII des *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1827.) M. Christoffel s'est proposé d'établir les principes d'une Trigonométrie générale des surfaces, c'est-à-dire d'une méthode pour calculer les éléments d'un triangle géodésique au moyen des coordonnées curvilignes de ses sommets. Ces éléments sont en général au nombre de neuf (dont six indépendants); car, pour chaque côté, il faut connaître la longueur et les azimuts initial et final (ces azimuts étant rapportés aux directions des courbes coordonnées).

Par des considérations aussi simples qu'ingénieuses, l'auteur a réussi à faire dépendre toute cette recherche d'une seule fonction de quatre variables, qu'il a appelée *longueur réduite* d'un arc géodésique, et qui est le facteur par lequel on doit multiplier l'angle infiniment petit de deux géodésiques de même origine et d'égale longueur, pour obtenir la distance infiniment petite de leurs extrémités (sur la sphère,

---

(*) CHRISTOFFEL (E.-B.). *Théorie générale des triangles géodésiques*. Extrait des *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin* pour l'année 1868. Berlin, imprimerie de l'Académie des Sciences, Librairie de F. Dümmler. In-8°. Prix : 4 fr.

On vend à part tous les Mémoires publiés par l'Académie de Berlin, et en général par les Académies allemandes.

la longueur réduite est le sinus de la longueur géodésique). Cette fonction, qui dépend évidemment des deux couples de coordonnées correspondants aux extrémités de l'arc, est symétrique par rapport à ces couples; elle satisfait généralement à une équation différentielle partielle non linéaire du troisième ordre à deux variables, qui sont les coordonnées d'une des extrémités de l'arc, les coordonnées de l'autre ne s'introduisant dans son expression que par une particularisation convenable des arbitraires de l'intégration. Cette fonction une fois connue, on n'a plus que des équations finies pour déterminer les longueurs des côtés.

Outre ce théorème fondamental très-remarquable, le Mémoire de M. Christoffel renferme une foule de résultats intéressants se rattachant au même sujet, entre autres une discussion très-précise de la continuité des lignes géodésiques, dont l'équation différentielle est présentée sous des formes nouvelles, et des développements très-curieux tirés de l'expression (déjà donnée par Gauss) de la mesure de courbure en coordonnées polaires curvilignes, expression qui fournit en même temps l'équation différentielle des longueurs réduites pour les différents arcs d'une même ligne géodésique. Ces développements se rapportent au cas, très-important à considérer, où la longueur réduite peut devenir nulle, sans que la longueur géodésique le soit elle-même. Fixant sur la ligne géodésique une origine arbitraire, les distances à cette origine de deux points variables, dont la distance réduite est constamment nulle, satisfont à une équation différentielle du troisième ordre, qui comprend, comme cas particulier, celle de Jacobi pour les équations modulaires des fonctions elliptiques, et qui possède une intégrale de même forme.

Nous devons signaler enfin, comme un sujet très-digne d'être étudié à fond, celui que M. Christoffel a rapidement traité dans la dernière Section de son Mémoire. Les côtés et les angles d'un triangle géodésique sont, en général, six fonctions indépendantes des coordonnées des sommets, de sorte qu'à chaque système de valeurs de ces éléments il ne répond qu'une seule position du triangle, ou plusieurs positions distinctes, mais non infiniment proches. Les surfaces appartenant à ce cas, qui est le plus général, constituent pour M. Christoffel la *première classe*. Mais on peut très-bien supposer, en particularisant convenablement la nature de la surface, qu'il existe, entre

les trois côtés et les trois angles, une, deux et même trois relations indépendantes des sommets, et dans ce cas, qui répond aux surfaces de la *seconde, troisième* et *quatrième* classe de M. Christoffel, il est évident que chaque triangle géodésique peut se déplacer sur la surface, sans que ses côtés et ses angles doivent varier nécessairement. Dans la seconde classe, le développement ne peut avoir lieu que suivant une ligne déterminée pour chaque sommet; dans la troisième, il est tout à fait arbitraire pour un sommet, mais déterminé en conséquence pour les deux autres; enfin il n'est limité, dans la dernière classe, que par la condition même de l'invariabilité des côtés.

Ce dernier cas est celui de la sphère, et, en général, de toutes les surfaces dont la courbure est constante en chaque point. C'est aussi le seul que M. Christoffel ait pu dégager complétement de ses formules. Le second cas comprend évidemment toutes les surfaces de révolution; mais sont-ce les seules? Le troisième doit aussi comprendre *certaines* surfaces de ce genre, et il serait bien intéressant de les connaître. Ces belles questions, qui ne sont pas les seules que l'étude du Mémoire fasse surgir dans l'esprit du lecteur, montrent combien le sujet inauguré par M. Christoffel est riche et attrayant.

E. Beltrami.

BRUHNS (C.), docteur en philosophie, directeur de l'Observatoire et professeur d'Astronomie à Leipzig. — Nouveau manuel de logarithmes a sept décimales, *pour les nombres et les fonctions trigonométriques*. Édition stéréotype. — Gr. in-8°, xxiv-610 pages; 1870. Leipzig, Bernard Tauchnitz, libraire-éditeur. Prix : $1\frac{1}{3}$ Thl. (*).

Les Tables logarithmiques de Bremiker et de Schrön, introduites en France dans ces dernières années, n'ont pas eu de peine à détrôner le vieux Callet, par suite des qualités précieuses qu'elles doivent à l'expérience de leurs auteurs dans la pratique du calcul. Le nouveau recueil que nous annonçons est, comme les précédents, l'œuvre d'un éminent astronome, qui a pu profiter des travaux de

(*) Ces Tables ont été publiées en allemand, en anglais et en français.

ses devanciers, et y introduire des perfectionnements qu'apprécieront aisément les calculateurs praticiens.

Il en est des Tables numériques comme des instruments d'Astronomie et de Physique. C'est par l'usage seulement qu'on peut en apercevoir les qualités et les défauts, et encore faut-il tenir un grand compte des habitudes individuelles du calculateur. Les jugements que l'on porte sur un Ouvrage de cette nature ont donc toujours un caractère plus ou moins subjectif. Aussi est-ce avec une certaine réserve que nous présenterons ici nos appréciations personnelles, uniquement fondées sur les observations que nous avons faites en pratiquant nous-même les calculs d'Astronomie mathématique.

Pour épargner des détails inutiles, nous supposerons connus de nos lecteurs les recueils de Bremiker et de Schrön, et nous nous contenterons d'indiquer en quoi s'en distingue l'ouvrage de M. Bruhns.

Comme ses deux devanciers, M. Bruhns a restreint son Recueil aux deux Tables rigoureusement nécessaires dans les calculs de précision, pensant avec juste raison qu'il est plus commode de trouver dans différents ouvrages les Tables qui répondent aux différents besoins du calculateur, que de les avoir toutes entassées dans un même volume. Comme le titre l'indique, le *Nouveau Manuel* contient la Table des logarithmes des nombres entiers, de 1 à 100000, et la Table des logarithmes des fonctions trigonométriques.

Une des considérations les plus importantes dans un Recueil de ce genre est celle de l'exécution typographique, et l'on peut dire que celle du présent Ouvrage fait le plus grand honneur aux presses de M. B. Tauchnitz. Comme dans les Tables de Bremiker, et dans la plupart des belles publications faites dans ces dernières années en Angleterre et en Allemagne, on a adopté les anciens chiffres elzéviriens, d'une lecture plus facile que les chiffres d'égale hauteur, et même que les chiffres français qu'emploie encore l'imprimerie de M. Gauthier-Villars. Les chiffres de M. Bruhns sont un peu plus forts que ceux de M. Bremiker; seulement, la plus grande inégalité d'épaisseur entre les pleins et les déliés nuit un peu à la facilité de la lecture.

Babbage, Schrön et quelques autres auteurs ont adopté une modification dont nous ne sommes nullement partisan. Ils indiquent par un signe particulier les cas où le dernier chiffre a été *forcé*. Cette indication, qui a dû leur couter un énorme travail, ne nous paraît

pas d'une grande utilité; elle introduit dans les pages du livre une certaine confusion, et conduit à des calculs beaucoup moins commodes et beaucoup plus longs que ceux qui résulteraient de l'emploi d'une huitième décimale. M. Bruhns restreint cette indication au seul cas où elle peut être réellement utile, à celui où le dernier chiffre est un 5, ce qui permet d'obtenir tous les logarithmes à 6 décimales, à moins d'une demi-unité près du dernier ordre.

La Table I, contenant les logarithmes vulgaires des nombres entiers de 1 à 100000, est disposée absolument comme la Table correspondante du Recueil de Bremiker. Malgré la meilleure forme des chiffres et la plus grande commodité du format de ces deux Recueils, nous avouons notre préférence pour la disposition donnée à cette section dans l'ouvrage de Schrön.

Il faut, en effet, considérer deux parties dans l'usage d'une Table : l'entrée *directe* et l'entrée *inverse*. Pour l'entrée directe, la disposition qui consiste à former chaque page de 50 ou 51 lignes, séparées de cinq en cinq par des blancs, permet à un calculateur tant soit peu exercé de trouver à première vue le nombre qu'il cherche, dès que le livre est ouvert à la page voulue. Il est inutile, dès lors, de se donner la peine, comme le font beaucoup d'auteurs et M. Schrön lui-même, de distinguer par des caractères plus forts les valeurs de l'argument de dix en dix lignes. Il nous semble même que le défaut d'uniformité qui en résulte est plutôt fait pour dérouter le coup d'œil. La disposition plus compliquée, qu'ont choisie MM. Bremiker et Bruhns, exige la lecture complète de l'argument, et rend la recherche moins prompte. A cela se joint la nécessité d'aller chercher quelques lignes plus haut ou plus bas les deux premiers chiffres de l'argument, qui ne sont inscrits que de dix en dix lignes, sans être séparés des autres par un blanc. Ce dernier inconvénient est plus sensible encore dans l'entrée inverse, quand on veut repasser du logarithme au nombre (*).

Nous pensons aussi qu'il n'eût pas été inutile de prolonger la Table

(*) Notre opinion sur ce point peut s'appuyer de l'autorité de Gauss, qui dit, en parlant d'une suppression de chiffres analogue dans les Tables de Pasquich : *Wir können diese Einrichtung bei Tafeln, die zum täglichen Gebrauch bestimmt sind, nicht unbedingt billigen, da das Auge immer die, wenn auch nur kleine, Mühe hat, in der Columne erst in die Höhe zu gehen, um die übrigen Ziffern zu finden.* (GAUSS Werke, t. III, p. 248.)

un peu au delà de 100000. Si l'on examine, en effet, un exemplaire d'une Table de logarithmes ayant longtemps servi, on verra les premières pages beaucoup plus usées que les autres, et cela tient à ce que les nombres voisins de l'unité sont ceux qui se rencontrent le plus souvent dans les calculs. Or, c'est précisément pour ces nombres que les différences tabulaires sont le plus fortes et l'interpolation le plus pénible. Seulement, il faudrait se garder, comme l'ont fait Callet et la plupart de ses successeurs, d'ajouter au prolongement de la Table une huitième décimale, qui n'est qu'un embarras inutile. Nous ne connaissons que Shortrede qui ait eu l'idée judicieuse de prolonger sa Table jusqu'à 120000, sans augmenter le nombre des décimales.

La Table trigonométrique se divise en deux parties, formant les Tables II et III.

La Table II contient les logarithmes des quatre fonctions trigonométriques de seconde en seconde, pour les six premiers degrés, c'est-à-dire pour un degré de plus que les Tables correspondantes de Callet et de Bremiker.

La Table III donne les mêmes logarithmes, de 10 en 10 secondes, pour le reste du quadrant.

M. Bruhns a préféré adopter, pour les colonnes de ces Tables, l'ordre suivi par Callet,

sinus, cosinus, tangente, cotangente,

tandis que Bremiker et Schrön ont choisi le même ordre que Lalande,

sinus, tangente, cotangente, cosinus.

Quoique nous penchions plutôt en faveur de cette dernière disposition, nous conviendrons cependant que c'est surtout l'habitude du calculateur qui doit décider en pareille circonstance.

Pour les 10 premières minutes, la Table II donne les logarithmes des quatre fonctions tout au long, avec les différences tabulaires et des Tables auxiliaires pour faciliter le calcul des parties proportionnelles. A partir de 10 minutes, le nombre des colonnes de chaque page est doublé, ce qui a forcé de supprimer les différences et les parties proportionnelles jusqu'à $1^{\circ}20'$; à partir de là, elles sont rétablies jusqu'à la fin du volume. Dans l'intervalle où elles manquent, on peut y suppléer avec avantage au moyen des logarithmes

des rapports $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\operatorname{tang} x}{x}$, que donne la Table I. De 0° 10′ à 6 degrés, les premiers chiffres des logarithmes ne sont inscrits que dans les blancs qui séparent les lignes de dix en dix, en caractères différents de ceux du texte, mais qui ne s'en distinguent peut-être pas d'une manière assez tranchée.

La disposition de la Table III diffère encore de celle de Bremiker, en ce qu'au lieu de partager, comme celui-ci, les groupes de six lignes en un et cinq, M. Bruhns les partage en trois et trois, ce qui nous paraît bien préférable.

Il nous semble, d'après les détails dans lesquels nous venons d'entrer, que la partie trigonométrique a été traitée par M. Bruhns avec une supériorité qui suffit pour assurer à son livre le premier rang parmi tous les Recueils de Tables que nous connaissons.

En tête du volume est placée une Introduction où sont exposées avec une grande clarté les instructions nécessaires pour l'usage des Tables.

J. Hoüel.

CHRISTIAN WIENER, professeur à l'École Polytechnique de Carlsruhe. — Épreuves stéréoscopiques du modèle d'une surface du troisième ordre a 27 droites réelles. *Avec une Notice explicative.* — Leipzig, Teubner. Prix : 3f,25.

Depuis 1849, époque des premières recherches de MM. Salmon et Cayley, la théorie des surfaces du troisième ordre a fait des progrès considérables, dont nous présenterons quelque jour l'histoire à nos lecteurs ; il nous suffira, pour le moment, de citer les noms de MM. Salmon, Cayley, Sylvester, Schläfli, August, Brioschi, Steiner, Clebsch, Cremona, Sturm, etc., qui tous ont contribué à donner à cette théorie un degré nouveau d'élégance et de perfection. Plusieurs auteurs ont déjà édifié une classification de la surface générale du troisième degré, d'après le nombre de droites réelles qu'elle renferme. C'est ainsi que M. Cremona, dans son beau Mémoire inséré au *Journal de M. Borchardt*, t. LXVIII, p. 1-133, a divisé les surfaces du troisième ordre en cinq espèces, d'après le nombre des droites réelles et des plans tangents triples réels. Le

tableau suivant indique les différents cas considérés par M. Cremona :

1re espèce.....	27 droites réelles.	45 plans tangents réels.
2e »	15 »	15 »
3e »	7 »	5 »
4e »	3 »	7 »
5e »	3 »	13 »

Les géomètres, qui ont poussé si loin l'étude abstraite des propriétés de la surface du troisième ordre, désiraient vivement, et cela se conçoit, avoir une idée nette de sa forme et voir construire au moins un modèle d'une surface du troisième ordre. Sur l'invitation des savants allemands, et après des essais infructueux d'autres géomètres, M. Wiener s'est mis à l'œuvre, et il nous paraît avoir très-bien réussi dans la construction d'une surface à 27 droites réelles. Nous l'avouerons, c'est avec une vive impatience que nous attendions les deux épreuves stéréoscopiques du modèle construit par M. Wiener. Nous les avons soigneusement examinées, nous avons compté les droites qui sont tracées en noir sur le modèle et nous engageons vivement nos lecteurs à se donner le même plaisir. Il y a, pour ceux qui ont le goût de la Géométrie, une véritable satisfaction à voir réaliser ainsi et confirmer par l'expérience les conceptions les plus abstraites, fondées sur des calculs et des considérations géométriques d'un ordre si élevé.

Il serait à désirer qu'un de nos grands établissements se procurât un des modèles qui ont servi pour les épreuves stéréoscopiques. Dans sa Notice explicative, M. Wiener déclare qu'il tient à la disposition des géomètres un modèle en plâtre, à un prix qui nous paraît très-modéré (50 florins de Bade). Le modèle a 50 centimètres de hauteur à peu près.

Nous savons aussi que M. Kummer a fait exécuter, à Berlin, un modèle de la surface des centres de courbure de l'ellipsoïde. Si l'un des éditeurs de Berlin voulait en faire tirer quelques épreuves stéréoscopiques, il rendrait certainement service à toute une classe de géomètres, qui, après avoir étudié les propriétés d'une surface, ne sont pas fâchés de voir la surface elle-même.

G. D.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

TIDSKRIFT FÖR MATEMATIK OCH FYSIK, tillegnad den svenska elementar-undervisningen, utgifven af Dr G. DILLNER (hufvudredaktör), Dr FR.-W. HULTMAN och Dr T. ROB. THALÉN. — Upsala, W. Schultz' Förlag (*).

T. II, 1869.

D-G. — *Sur les équations du troisième degré.* (7 p.; suéd.)

HILDEBRANDSSON (H.). — *Revue historique des théories les plus importantes sur la vaporisation des liquides.* (11 p.; suéd.)

HULTMAN (F.-W.). — *Histoire de l'Arithmétique en Suède.* (Suéd.) Suite d'articles, commencés dans le tome précédent.

HULTMAN (F.-W.). — *Sur le calcul des valeurs des rentes viagères, des assurances sur la vie et des primes d'assurance sur la vie.* (3 art., 23 p.; suéd.)

MALMSTEN (C.-J.). — *Intégration de l'équation différentielle*

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = f(x^2+y^2).$$

(3 p.; suéd.)

D-G. — *Sur le reste de la série de Taylor.* (2 p.; suéd.)
ψ étant une fonction arbitraire, et $0 < \lambda < 1$,

$$R = \frac{\psi(h)-\psi(0)}{\psi'[(1-\lambda)h]} \frac{(1-\lambda)^n h^n}{1.2\ldots n} f^{(n+1)}(z+\lambda h).$$

DILLNER (G.). — *Théorie du calcul géométrique.* (Suéd.)
Suite d'articles commencés dans le précédent volume. — Le calcul géométrique a le même objet que le calcul des équipollences de M. Bellavitis. La forme seulement est plus analytique.

THALÉN (Rob.). — *Sur l'origine du temps et le jour de la semaine en différents lieux de la Terre.* (12 p.; suéd.)

(*) *Journal de Mathématiques et de Physique*, destiné à l'enseignement élémentaire en Suède. Publié par G. DILLNER, rédacteur en chef; FR.-W. HULTMAN et T.-R. THALÉN. Upsala, chez W. Schultz. Fondé en 1868. Paraissant tous les deux mois par cahier de 3 à 4 feuilles. In-8°. Prix : 10 francs. En langue suédoise, etc.

D-G. — *Sur la théorie élémentaire du facteur d'intégration.* (8 p.; suéd.)

Thalén (Rob.). — *Léon Foucault.* (18 p.; suéd.)

Dillner (G.). — *Détermination des accélérations par une construction.* (6 p.; suéd.)

Phragmén (Lars). — *Théorie des maxima et minima.* (8 p.; suéd.)

Lindman. — *Remarques sur les figures rectilignes inscrites et circonscrites à une ellipse.* (17 p.; suéd.)

D-G. — *Sur l'intégration par substitution.* (8 p.; suéd.)

Étant donnée une équation différentielle

$$f_1(x,y)\,dx + f_2(x,y)\,dy = 0,$$

on pose $y = \mathrm{F}(x,z)$, et l'on cherche à déterminer la fonction F, de manière à pouvoir séparer les variables.

Rubenson (R.). — *Est-il possible de prédire le temps?* (37 p., 2 pl.; suéd.)

Résumé des travaux météorologiques exécutés dans ces derniers temps, en France, en Angleterre et en Norvége.

T. III, 1870.

Dillner (G.). — *Essai d'exposition de la théorie des parallèles.* (6 p.; suéd.)

L'auteur remplace l'axiome d'Euclide par un principe tiré de la formation des angles par des rotations, et qui lui paraît d'une plus grande évidence.

Hultman (F.-W.). — *Histoire de l'Arithmétique en Suède* (suite). (5 p.; suéd.)

Steen (Ad.). — *Nouvelle méthode pour l'intégration de l'équation*

$$\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left(1+\dfrac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = 2f(x^2+y^2).$$

(4 p.; dan.)

Leffler (G.-M.). — *Intégration de l'équation*

$$f(x^2+y^2)=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On prend pour nouvelles variables le rayon vecteur et la distance de l'origine à la tangente; puis on introduit l'angle de cette distance avec l'axe des x.

Dillner (G.). — *Éléments du calcul géométrique* (suite). (13 p.; suéd.)

Notations. Propositions déduites d'identités géométriques.

Résolution des équations géométriques.

Nous donnerons prochainement un résumé de la première Partie de ce travail.

Steen (Ad.). — *Remarques sur l'intégration des équations différentielles.* (4 p.; dan.)

Au sujet de la méthode de substitution proposée par D-g.

TIDSSKRIFT for Mathematik. Udgivet af Camillo Tychsen. Anden Række (*).

T. V, 1869.

Hansen (Chr.). — *Détermination élémentaire de l'aire et du volume du tore.* (3 p.; dan.)

Tychsen (C.). — *Sur le mouvement de la toupie gyroscopique.* (11 p.; dan.)

Tychsen (C.). — *Rectification relative à un Mémoire d'Abel.* (3 p.; dan.)

Voyez *Œuvres d'Abel,* t. II., p. 244. « Sur l'équation différentielle

$$(y+s)dy+(p+qy+ry^2)dx=0.\text{ »}$$

(*) *Journal de Mathématiques.* Publié par C. Tychsen. 2e Série. Copenhague, chez Otto Schwartz. Imprimerie de Cohen. — La 2e Série a commencé à paraître en 1865, faisant suite au *Mathematisk Tidsskrift* du même auteur, composé de six années. Publié en danois, etc. Paraissant tous les deux mois, par fascicules de 2 feuilles gr. in-8. (Prix : 6 francs par an.)

Zachariæ (G.). — *Mesure du degré de méridien en Danemark, tome I. Publié par* C.-G. Andræ (18 p.; dan.)

Remarques sur le calcul des triangles sphéroïdiques et sur l'application de la méthode des moindres carrés.

Petersen (J.). — *Application du principe des vitesses virtuelles à un système où il existe des frottements.* (2e art., 9 p.; dan.)

Hansen (Chr.). — *Sur les solutions particulières des équations différentielles du premier ordre.* (4 p.; dan.)

Zeuthen (H.-G.). — *Équations fondamentales pour les deux systèmes de coordonnées trilatères et pour les deux systèmes de coordonnées tétraédriques.* (7 p.; dan.)

Pfeiffer (Ad.) — *Recherche sur la convergence de la formule du binôme.* (3 p.; dan.)

Discussion du reste du développement de $(1+x)^m$ par la série de Taylor dans les cas limites de $x = \pm 1$ et pour les différentes valeurs de m.

Thiele (T.-N.). — *Remarques sur les fractions continues.* (2 p.; dan.)

Les fractions convergentes peuvent se mettre sous la forme du quotient de deux déterminants. On peut aussi remplacer deux quotients incomplets consécutifs a_m, a_{m+1} par les trois autres $a_m + \sqrt{-1}$, $\sqrt{-1}$, $a_{m+1} + \sqrt{-1}$, ce qui conduit à des formules qui ont lieu quelle que soit la parité de l'indice.

Lorenz (L.). — *Sur les soulèvements et les affaissements.* (5 p.; dan.)

Zeuthen (H.-G.). — *Remarques au sujet de l'article de* Chr. Hansen *sur les solutions singulières.* (3 p.; dan.)

Hansen (P.-C.-V.). — *Intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*

$$\frac{d^2 z}{dx^2} - \frac{m(m+1)}{x^2} z - a^2 \frac{d^2 z}{dy^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{2n}{x}\frac{dz}{dx} - a^2 \frac{d^2 z}{dy^2} = 0,$$

$$x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + q x^2 \frac{d^2 z}{dx\,dy} - 6z = 0.$$

(6 p.; dan.)

Mylord (H.). — *Sur l'ellipsoïde central et les axes principaux.* (7 p.; dan.)

Petersen (J.). — *Quelques remarques sur la théorie des équations.* (2 p.; dan.)

PHILOSOPHICAL Transactions of the Royal Society of London. — London, printed by Taylor and Francis (*).

T. CLVII; 1867.

Cayley (A.). — *Mémoire supplémentaire sur les caustiques.* (9 p.)

Addition au « Mémoire sur les caustiques, » publié dans les *Philos. Transact.*, t. CXLVII, 1857; p. 273-312.

Maxwell (J.-Cl.). — *Sur la théorie dynamique des gaz.* (40 p.)

Everett (J.-D.). — *Expériences sur la torsion et la flexion pour déterminer la rigidité du verre.* (15 p., 1 pl.)

Clarke (A.-R.). — *Extrait des résultats des comparaisons des étalons de mesures de longueur en Angleterre, en Belgique, etc.* (20 p.)

Smith (H.-J.-St.). — *Sur les ordres et les genres des formes quadratiques ternaires.* (44 p.)

Eisenstein, dans son Mémoire intitulé : « Neue Theoreme der höheren Arithmetik » (*Journal de Crelle*, t. XXXV, p. 117), a étudié les caractères des ordres et des genres des formes quadratiques ternaires de déterminant impair. M. Smith complète ces recherches, en les étendant aux formes de déterminant pair.

Neumayer (G.). — *Sur la variation diurne lunaire de la déclinaison magnétique, eu égard spécialement à la déclinaison de la Lune.* (9 p.)

Cayley (A.). — *Huitième Mémoire sur les quantiques.* (42 p., 1 pl.)

Application des recherches contenues dans les Mémoires précédents (n°s 2, 3, 5), au cas des quintiques. Détermination des covariants du sixième degré. Développements des recherches récentes de MM. Sylvester et Hermite. Voici les titres des Chapitres :

La quintique binaire, covariants et syzygies du sixième degré. — Expression de l'invariant du dix-huitième degré en fonction des ra-

(*) Il paraît chaque année un volume gr. in-4, en un ou plusieurs fascicules. En langue anglaise.

cines. — Théorie de la détermination du caractère d'une équation ; auxiliaires ; espace facultatif et non facultatif. — Application à l'équation quartique. — Détermination des caractères de l'équation quintique. — Nouvelle forme donnée par Hermite à la transformation de Tschirnhaus, et application à la quintique. — Application par Hermite des résultats précédents à la détermination du caractère de l'équation quintique. — Comparaison avec le critérium précédent; la cubique nodale. — Troisième espèce de critériums d'Hermite; comparaison avec ce qui précède, et remarques. — Forme canonique de la quintique d'après Hermite. — Théorie des transformations linéaires imaginaires qui conduisent à une équation réelle. — Application aux auxiliaires d'une quintique. — Théorème d'analyse relatif à une quantique binaire d'ordre quelconque.

T. CLVIII; 1868.

Airy (G.-B.). — *Calcul des longueurs des ondes lumineuses correspondantes aux raies du spectre de dispersion mesurées par Kirchhoff.* (27 p.)

Oxmantown (Lord). — *Compte rendu des observations de la Grande Nébuleuse d'Orion, faites à Birr-Castle avec des télescopes de 3 et de 6 pieds, de 1848 à 1867.* (17 p., 3 pl.)

Cayley (A.). — *Sur les courbes qui satisfont à des conditions données. — Premier Mémoire* (69 p.). — *Deuxième Mémoire.* (18 p.)

Le but de ces Mémoires est la recherche du nombre des courbes qui satisfont à des conditions données. Les courbes considérées sont ou des courbes d'un ordre déterminé r, assujetties à des conditions de contact avec une courbe donnée, ou des coniques assujetties à des conditions de même genre, mais plus compliquées.

Premier Mémoire : Sur la représentation quasi-géométrique des conditions. — Représentation et développement des recherches de Chasles et de Zeuthen. — Recherches faites comme extension de celles de M. de Jonquières, relativement aux contacts d'une courbe d'ordre r avec une courbe donnée. — Additions : N° 1. Sur la forme de l'équation des courbes d'une série d'indice donnée. — N° 2. Sur les couples de lignes passant par trois points donnés et touchant une conique donnée. — N° 3. Sur les coniques passant par deux points donnés et touchant une conique donnée. — N° 4. Sur les coniques

touchant une cubique à rebroussement. — N° 5. Sur les coniques qui ont un contact du troisième ordre avec une cubique à rebroussement donnée, et deux contacts (contact double) avec une conique donnée. — N° 6. Formes de Zeuthen pour les caractéristiques des coniques qui satisfont à quatre conditions. — N° 7. Problème.

Deuxième Mémoire : Le principe de correspondance. — L'auteur reproduit, avec de nouveaux développements, la théorie établie dans son Mémoire : « *On the correspondence of two points on a curve* » (*London Math. Society*, n° 7, avril 1866). — Sur la correspondance des points d'une courbe. — Application aux coniques satisfaisant à des conditions dont une au moins est arbitraire. — Application aux coniques qui satisfont à cinq conditions de contact avec une courbe donnée.

Cayley (A.). — *Addition au Mémoire sur la résultante d'un système de deux équations.* (8 p.)

Le Mémoire dont il s'agit se trouve dans les *Phil. Trans.* pour 1857, p. 703-715. Le nouveau travail de M. Cayley contient, écrites complétement, les résultantes de deux équations dont les degrés respectifs varient de 2 à 4.

Crofton (N.-W.). — *Sur la théorie de la probabilité locale, appliquée à des lignes droites, tracées au hasard sur un plan ; les méthodes sont, en outre, étendues à la démonstration de certains théorèmes nouveaux de calcul intégral.* (19 p.)

L'auteur parvient au théorème suivant, d'où l'on peut déduire un grand nombre d'intégrales doubles : « Si θ est l'angle sous lequel on voit du point (x, y) une aire convexe Ω, on a

$$\iint \theta\, dx\, dy = \pi(\Theta - 2\mathrm{A}),$$

l'intégration s'étendant à tout l'espace annulaire compris entre Ω et un contour convexe extérieur, donné d'une manière quelconque ; Θ étant l'aire de l'espace annulaire, et A l'aire *moyenne* du segment détaché de l'anneau par une tangente au contour de Ω. »

On en déduit, par exemple, pour deux ellipses homothétiques,

$$\iint \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{2\sqrt{a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2}}{x^2 + y^2 - a^2 - b^2}\right) dx\, dy = \pi ab k^2(\pi \sin^2\tfrac{1}{2}\alpha - \alpha + \sin\alpha),$$

$$\left(1 < \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < k^2, \quad \cos\tfrac{1}{2}\alpha = \frac{1}{k}\right).$$

Phillips (J.). — *Notices sur quelques parties de la surface de la Lune.* (13 p., 3 pl.)

Sabine (E.). — *Contributions au magnétisme terrestre.* N° 9. (46 p., 3 pl.)

Recherches sur le magnétisme terrestre dans les régions polaires antarctiques.

Bashforth (F.). — *Sur la résistance de l'air au mouvement des projectiles allongés, pour diverses formes de la tête.* (25 p.)

Merrifield (Ch.-W.). — *Sur la loi de la résistance de l'air aux projectiles de carabine.* (4 p.)

L'auteur trouve une résistance proportionnelle au cube de la vitesse.

Stokes (G.-G.). — *Communication des vibrations d'un corps vibrant à un milieu gazeux.* (17 p.)

Étude mathématique entreprise à l'occasion de l'expérience de Leslie sur l'extinction du son par le mélange de l'hydrogène avec l'air atmosphérique.

Airy (G.-B.). — *Comparaison des perturbations magnétiques indiquées par le magnétomètre enregistreur de l'Observatoire Royal de Greenwich, avec les perturbations magnétiques déduites des courants galvaniques terrestres correspondants, indiqués par le galvanomètre enregistreur de l'Observatoire Royal.* (8 p.)

Huggins (W.). — *Nouvelles observations sur le spectre de quelques étoiles et de quelques nébuleuses, avec un essai pour déterminer, d'après cela, si ces corps se meuvent en s'approchant ou en s'éloignant de la Terre, et des observations sur les spectres du Soleil et de la Comète II,* 1868. (36 p., 1 pl.)

Cayley (A.). — *Sur les conditions d'existence de trois racines égales ou de deux couples de racines égales dans une quartique ou une quintique binaire.* (12 p.)

Pollock (Sir Fr.). — *Sur les mystères des nombres, auxquels Fermat fait allusion. — Deuxième Communication.* (16 p., 2 pl.)

Sur la décomposition des nombres en carrés, en nombres triangulaires, etc.

Maxwell (J.-C.). — *Sur une méthode pour faire une comparaison directe de l'électrostatique avec la force électromagnétique; avec une Note sur la théorie électromagnétique de la lumière.* (15 p.)

Parkes (W.). — *Sur les marées à Bombay et à Kurrachee.* (12 p., 1 pl.)

T. CLIX, 1869 (Première Partie).

Warren de la Rue, Balfour Stewart et Benjamin Loewy. — *Recherches sur la physique du Soleil. Positions héliographiques et aires des taches solaires observées au photohéliographe de Kew, en 1862 et* 1863. (110 p., 2 pl.)

Cayley (A.). — *Troisième Mémoire sur les surfaces gauches (Scrolls).* (16 p.)

Ce Mémoire est un supplément au second Mémoire sur les surfaces gauches (*Phil. Trans.,* 1864, p. 559-577), et est aussi relatif à la théorie des surfaces gauches du quatrième ordre (quartiques). L'auteur y traite de deux espèces de surfaces omises dans son second Mémoire.

Robinson (T.-R.) et Grubb (Th.) — *Description du grand télescope de Melbourne.* (35 p., 10 pl.)

Cet instrument est un réflecteur de 4 pieds, à miroir métallique, construit d'après le système de Cassegrain, et destiné à l'observation des nébuleuses de l'hémisphère austral.

Cayley (A.). — *Mémoire sur la théorie des surfaces réciproques.* (29 p.)

Extension de la théorie de ces surfaces donnée par M. Salmon dans sa Géométrie analytique.

Cayley (A.) — *Mémoire sur les surfaces du troisième degré.* (96 p.)

Ce Mémoire fait suite au Mémoire de M. Schläfli *sur la distribution des surfaces du troisième ordre en espèces, eu égard à la présence ou à l'absence des points singuliers, et à la réalité de leurs lignes.* (*Phil. Trans.,* 1863, p. 193-241.) Mais le point de vue auquel se place l'auteur est différent. Il ne tient aucun compte de la division fondée sur la réalité des lignes, ne conservant que la division en 22 ou plutôt en 23 cas, ayant pour base la nature des singularités. Il

s'attache à cette question, en vue surtout de la lumière qu'elle jette sur la théorie des surfaces réciproques.

Chambers (Ch.). — *Sur les variations solaires de la déclinaison magnétique à Bombay* (24 p., 6 pl.)

Résultats d'observations faites pendant les sept années 1859-65 à l'Observatoire du Gouvernement à Bombay.

Airy (G.-B.). — *Sur les inégalités diurnes et annuelles du magnétisme terrestre, déduites d'observations faites à l'Observatoire Royal de Greenwich, de* 1858 à 1863. *Suite d'une Communication sur les inégalités diurnes de* 1841 à 1857, *imprimée dans les* Philosophical Transactions *de* 1863. *Avec une Note sur les inégalités luno-diurnes et autres inégalités lunaires, déduites d'observations s'étendant de* 1848 *à* 1863. (12 p., 4 pl.)

Lockyer (J.-N.). — *Observations spectroscopiques sur le Soleil.* N° II. (20 p., 2 pl.)

Recherche des protubérances rouges au moyen du spectroscope.

VERSLAGEN EN MEDEDEELINGEN der Koninglijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam. 2de Reeks, 3de Deel; 1869 (*).

Cohen Stuart. — *Sur les formules connues de l'équilibre intérieur d'un cylindre creux et d'une sphère creuse.* (3 p.; holl.)

Cohen Stuart. — *Sur la pression exercée sur les points d'appui.* (3 p.; holl.)

Euler a démontré que la recherche des pressions exercées sur ses points d'appui par un corps pesant, reposant sur un plan horizontal par un nombre quelconque de points, est un problème déterminé, lorsque le corps est parfaitement rigide et que les points d'appui cèdent, dans la direction des pressions, de quantités proportionnelles à ces pressions. M. Cohen Stuart étend la même proposition au cas où le corps, limité par une surface quelconque, repose sur un nombre quelconque de surfaces fixes et est soumis à des forces quelconques.

Stamkart (F.-J.). — *Mesure d'une base dans la mer de Harlem, pendant l'été de* 1868. (28 p., 2 pl.; holl.)

(*) *Actes et Communications de l'Académie Royale des Sciences d'Amsterdam.* 2e Série, t. III; 1869. — Un volume in-8° par an. En hollandais et en français.

Hoek. — *Détermination de la vitesse avec laquelle est entraîné un rayon lumineux traversant un milieu en mouvement.* (8 p., 1 pl.; fr.)

Bierens de Haan. — *Sur la théorie des intégrales définies.* N° IX. (17 p., 1 pl.; holl.)

Sur les intégrales singulières. Cauchy appelle ainsi les intégrales définies dont les limites sont prises à des distances infiniment petites de part et d'autre d'une valeur qui rend infinie la fonction sous le signe $\int$. Généralement ces intégrales sont indéterminées, sauf les cas où elles s'annulent. Dans ces derniers cas, une intégrale définie, prise entre des limites qui comprennent entre elles la valeur critique, est complétement déterminée. M. Bierens de Haan étudie en particulier les intégrales

$$\int_0^\infty f(x)\frac{dx}{q^2-x^2}, \qquad \int_0^\infty f(x)\frac{x\,dx}{q^2-x^2},$$

qui sont finies et continues toutes les fois que $f(x)$ est continue dans le voisinage de $x=q$.

MONATSBERICHTE der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Jahrgang 1869 (*).

Christoffel. — *Sur la transformation des expressions différentielles homogènes entières.* (5 p.)

Lipschitz. — *Recherches sur les fonctions homogènes entières de n différentielles.*

Kronecker (L.). — *Sur les systèmes de fonctions de plusieurs variables.* (2 art., 44 p.)

Auwers. — *Sur la valeur de la constante de l'aberration d'après les observations de Molyneux.* (39 p.)

Du Bois-Reymond. — *Sur le mouvement apériodique des aimants.* (46 p.)

Weierstrass. — *Sur les fonctions monodromes les plus générales de n variables, à 2n périodes.* (4 p.)

(*) *Comptes rendus mensuels de l'Académie Royale des Sciences de Prusse*, à Berlin Année 1869. — Paraît chaque mois par livraisons in-8, en langue allemande.

Kirchhoff (G.-R.). — *Sur les forces que peuvent paraître exercer l'un sur l'autre deux anneaux rigides, infiniment minces, dans un fluide.* (6 p.)

RENDICONTI del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. 2ᵉ Série; Milan (*).

T. II, 1869. Fasc. 1-16.

Brioschi (F.). — *Sur l'équation qui donne les points d'inflexion des courbes elliptiques.* (7 p.)

Les courbes *elliptiques* sont les courbes planes du $n^{ième}$ ordre, ayant $\frac{n(n-3)}{2}$ points doubles ou de rebroussement. Leurs coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3 peuvent s'exprimer par trois équations de la forme

$$\rho x_i = f_i(x) + \varphi_i(x)\psi(x), \quad (i = 1, 2, 3),$$

x étant un paramètre variable; f_i, φ_i des fonctions entières et rationnelles, et

$$\psi(x) = \sqrt{x(1-x)(1-k^2x)} \ (^{**}).$$

M. Brioschi ramène la résolution de l'équation aux points d'inflexion à des équations des quatre premiers degrés.

Cremona (L.). — *Sur la transformation des courbes hyperelliptiques.* (5 p.)

On appelle ainsi une courbe dont les coordonnées sont exprimables rationnellement au moyen d'un paramètre λ et de la racine carrée d'une fonction entière $Q(\lambda)$ de degré $2p+2$ (Clebsch et Gordan, *Theorie d. Ab. Funct.*, p. 69 et 77). L'auteur étend le procédé de transformation appliqué dans l'Ouvrage cité aux cas de $p=1$ et de $p=2$.

Casorati (F.) et Cremona (L.). — *Sur le nombre des modules des équations ou des courbes algébriques d'un genre donné.* (5 p.)

Le mot *genre* est pris ici dans le même sens que le mot *Klasse* (Rie-

(*) Publié annuellement en vingt fascicules in-8; en langue italienne. Prix : 12 fr. pour l'Italie.

(**) Clebsch, *Ueber diejenigen Curven u.s.w.* (*Journ. de Crelle*, t. LXIV). — Clebsch et Gordan, *Th. d. Ab. Funct.*

MANN, *Th. d. Ab. Funct.*) et le mot *Geschlecht* (CLEBSCH et GORDAN). Le nombre des modules des courbes du genre p ayant été indiqué par Riemann comme égal à $3p-3$, et par Cayley (*Proc. of the London Math. Soc.*, oct. 1865) comme égal à $4p-6$, la question a été décidée dans le sens de Riemann par BRILL. (*Math. Annalen*, t. I, p. 401.)

BELTRAMI (E.). — *Sur un nouvel élément introduit par M. Christoffel dans la théorie des surfaces.* (10 p.)

Au sujet du Mémoire de CHRISTOFFEL : *Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke* (*Mém. de l'Ac. de Berlin*, 1868, p. 119-176). Si une ligne géodésique ab tourne d'un angle infiniment petit $d\omega$ autour de a, l'arc ds décrit par b, a pour mesure $d\omega \times$ une certaine quantité, que Christoffel nomme la *longueur réduite* de ab. C'est sur cette considération que sont fondées les recherches importantes, sur lesquelles M. Beltrami présente ici quelques remarques.

MÉLANGES.

FUNÉRAILLES DE M. LAMÉ, LE MARDI 3 MAI 1870.

DISCOURS DE M. BERTRAND.

« La mort de notre excellent et illustre confrère est une perte cruelle pour l'Académie. Sa tâche d'inventeur était depuis longtemps accomplie, et les infirmités qui l'éloignaient de nos séances lui avaient interdit le travail; mais la gloire d'un tel nom était encore une force pour nous tous, et la Section de Géométrie pouvait, après tant de pertes, saluer avec un légitime orgueil, dans son vénéré et cher doyen, l'un des représentants les plus élevés, en Europe, de la Physique mathématique et de la Philosophie naturelle.

» Lamé a été un grand géomètre, il a créé des méthodes aujourd'hui classiques; mais il était avant tout un grand esprit, un penseur aux conceptions hardies, un investigateur obstiné des secrets les plus cachés de la nature.

» Aucun rôle n'est plus grand dans l'histoire de la science que celui des physiciens géomètres. Cette grande école a compté dans

notre Académie, depuis Huyghens, de bien illustres représentants; celui que nous perdons aujourd'hui était, dans l'opinion de tous, leur plus éminent successeur.

» Peu d'esprits, à aucune époque, ont été plus aptes que celui de Lamé au maniement des formules analytiques. Il excellait à donner une forme élégante et concise aux expressions les plus rebelles. Quelque question qu'il abordât, la solution contenait, comme à son insu, d'admirables développements analytiques, dont il était le seul à méconnaître l'intérêt propre.

» Il avait placé plus haut le but de ses efforts; les Mathématiques ont été surtout à ses yeux un instrument destiné à pénétrer la nature. La joie qu'il éprouvait parfois à contempler l'élégance de ses méthodes et de ses résultats intermédiaires n'était pas chez lui la satisfaction vulgaire de l'auteur complaisant pour son œuvre; il songeait trop à ce qui lui restait à faire, pour s'enorgueillir de ce qu'il avait fait. L'esprit toujours tendu vers le but qu'il espérait atteindre, toute autre conquête était à ses yeux sans valeur, et si les bonnes fortunes analytiques, si souvent admirées par de si grands juges, ne le laissaient pas indifférent, c'est qu'il estimait qu'elles ne sont possibles que sur la route de la vérité.

» Cette conviction, aussi sincère chez lui que modeste, n'était pas partagée par les géomètres. Trop d'exemples prouvent que ces hasards heureux n'arrivent qu'à certains esprits, et qu'à ceux-là ils arrivent toujours. L'Algèbre, comme toutes les langues, a ses grands écrivains qui savent marquer tous les sujets à l'empreinte de leur génie, et forcer l'admiration de ceux mêmes qui n'acceptent pas leurs prémisses; mais le triomphe des idées est pour les esprits de premier ordre le seul but réellement digne d'efforts, et le seul souvenir qu'ils veulent attacher à leur nom.

» Telle a été la préoccupation incessante de Lamé. Il ne s'était rien proposé de moins que de relier toutes les lois physiques dans les conséquences d'un principe unique, en les rattachant, avec celles de la Mécanique et du Système du monde, à l'étude d'un fluide, dont les physiciens, depuis Fresnel, ne contestent plus l'existence. Malgré les grands travaux qui la préparent, une œuvre aussi vaste ne pouvait être accomplie par un seul homme. Lamé savait qu'il n'y mettrait pas la dernière main, mais il a épuisé ses forces à l'attaquer en tous sens.

» Les auditeurs de la Sorbonne n'ont pas oublié les accents généreux qui, chaque année, au début de son cours, les conviaient à la tâche pour laquelle il eût voulu unir les efforts de tous. Persuadé que le succès était proche, peu lui importait que d'autres atteignissent le but avant lui, pourvu que la vérité fût révélée.

» Cet enthousiasme éloquent par lequel il stimulait les jeunes savants, Lamé le portait dans toutes les questions qui intéressaient la science; il nous étonnait, sans jamais froisser personne, par l'ardeur de ses convictions et l'élévation passionnée et émue de sa parole. On sentait en toute occasion, sous la rigueur du géomètre, l'imagination brillante, féconde, poétique parfois, du philosophe et la générosité entraînante et dévouée de l'homme de bien.

» L'élévation et la variété de son œuvre n'ont jamais altéré la modestie de notre excellent confrère; il s'humiliait devant la grandeur des problèmes dont il ne pouvait détacher ses efforts en réservant pour les principes seuls de ses travaux son admiration tout entière.

» L'avenir prononcera; mais que sa cause triomphe, ou que ses espérances s'évanouissent, l'histoire de la science devra lui consacrer plus d'une page et saluer à plus d'un titre les œuvres que leur solide beauté ferait survivre, quoi qu'il puisse arriver, aux hypothèses mêmes qui les ont inspirées. »

DISCOURS DE M. COMBES.

« Le corps des Ingénieurs des Mines, dont je suis ici l'organe, tient à honneur de revendiquer comme l'un des siens le professeur illustre, le géomètre éminent dont nous venons rendre les restes mortels à la terre. Les premiers travaux de Lamé ont été publiés dans le Recueil des *Annales des Mines*, de 1819 à 1830. C'est d'abord un Mémoire sur une nouvelle manière de calculer les angles des cristaux, où l'auteur, tout en reconnaissant les avantages particuliers aux considérations purement géométriques appliquées par Haüy, montre comment l'analyse de Descartes conduit à une formule générale qui embrasse tous les cas possibles. Une note de la rédaction nous apprend que cet article est extrait d'un Ouvrage de Lamé, ayant pour titre : *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre*

les problèmes de Géométrie, et les rédacteurs ajoutent : « Cet Ouvrage
» sera lu avec un grand intérêt par les personnes qui se livrent à
» l'étude des Mathématiques ; elles y trouveront des principes géné-
» raux dont elles pourront faire de fréquents usages pour la solution
» des problèmes. » Lamé était alors élève ingénieur des Mines. Le tome suivant du Recueil renferme des extraits du *Journal du voyage* qu'il fit avec M. Thirria aux usines du Creuzot et à celles de Vienne et de la Voulte, dans la vallée du Rhône.

» On sait qu'en quittant l'École des Mines, Lamé et son ami Clapeyron partirent pour la Russie, où ils séjournèrent jusqu'en 1830, remplissant à la fois les fonctions de professeurs et d'ingénieurs. Pendant ces dix années, ils entretinrent une correspondance suivie avec plusieurs membres du corps des Mines, particulièrement avec M. Baillet, professeur du Cours d'exploitation des Mines. Lamé écrivait, en 1824, à cet excellent homme, son vénéré maître et le mien : « *Le souvenir des leçons dans lesquelles vous m'avez inspiré le goût de*
» *la Mécanique pratique me fait espérer que ce que je prends la liberté*
» *de vous écrire ici ne sera pas sans intérêt pour vous.* »

» On trouve dans cette lettre un exposé bref et élégant du calcul des ponts suspendus en chaînes de fer, la description d'une machine à essayer les résistances des chaînes à la rupture et à l'extension, et les résultats des expériences faites sur des fers de diverses provenances. L'année suivante, il adressait également à M. Baillet les éléments principaux du projet d'un pont en chaînes de 1 022 pieds d'ouverture sur la Néva, dressé par lui, par Clapeyron et par Bazaine, du corps des Ponts et Chaussées de France, engagé comme eux au service de la Russie.

» Ils avaient envoyé, l'année précédente, à l'Académie des Sciences, un Mémoire sur la stabilité des voûtes, composé à l'occasion de la reconstruction de l'église Saint-Isaac, à Saint-Pétersbourg, présentant deux portiques semblables à celui du Panthéon de Rome, dont chacun devait être recouvert par une voûte en berceau et en plein cintre, et par deux plates-bandes latérales. La voûte, de plus de 40 pieds de diamètre, assise sur des colonnades sans autre massif latéral pour résister à la poussée, présentait de graves difficultés et des doutes avaient été élevés sur sa stabilité. Chargés de traiter la question, ils établirent une théorie qui, au jugement de l'illustre rapporteur de l'Académie, M. de Prony, offrait des résultats cu-

rieux et nouveaux, obtenus par une analyse conduite avec *adresse et élégance*. L'originalité et la netteté de l'exposition sont également de sa part l'objet d'éloges auxquels l'Académie s'associait en 1823, et qui ont été consacrés depuis par l'assentiment de tous les ingénieurs.

» Le Mémoire sur les engrenages, imprimé en 1824, et resté classique dans l'enseignement des machines, se distingue par les mêmes qualités.

» En 1828, Lamé, sans avoir eu connaissance des travaux antérieurs de Navier et de Cauchy sur l'équilibre intérieur des solides élastiques, arriva non-seulement aux mêmes résultats que ces illustres géomètres, mais encore en obtint beaucoup d'autres, parmi lesquels nous citerons la découverte des surfaces que l'on peut appeler, suivant l'expression de notre savant confrère M. de Saint-Venant, *les deux véritables ellipsoïdes des pressions*, dont l'un donne par ses rayons vecteurs leurs directions et intensités, et l'autre par ses plans tangents les directions des faces sur lesquelles agissent ces pressions. Son beau Mémoire, écrit en Russie en commun avec Clapeyron, commença à élucider une matière auparavant difficile à aborder. Les Leçons sur l'élasticité, de 1852, ont complétement éclairé ce sujet et ont approprié les principes de l'équilibre intérieur des corps aux applications même pratiques, ainsi que le montrent les récents Mémoires de savants ingénieurs des Ponts et Chaussées sur l'équilibre des terres et l'hydrodynamique des cours d'eau.

» Le Mémoire de 1828 présente d'admirables exemples d'intégration des équations de l'élasticité; mais le plus mémorable est la magnifique solution, donnée vingt ans plus tard, du problème de la déformation d'une sphère élastique pleine ou creuse, sollicitée par des forces distribuées d'une manière quelconque à sa surface.

» Après sa rentrée en France en 1830, Lamé, devenu professeur à l'École Polytechnique et à la Faculté des Sciences de Paris, a néanmoins coopéré, comme ingénieur, avec son ami Clapeyron, à la grande œuvre de la construction des chemins de fer; il a pris une part effective et considérable aux projets et à l'exécution de ceux de Paris à Saint-Germain et de Paris à Versailles, rive droite.

» Lamé n'a donc pas été seulement un géomètre éminent et l'un des écrivains les plus distingués de notre temps : ses travaux ont eu et auront pour l'art des constructions des conséquences pratiques

dont l'importance devient chaque jour plus manifeste ; son nom appartient à la fois à l'histoire de la science pure et à celle des sciences appliquées par les ingénieurs du Corps auquel il s'honorait d'appartenir. C'est parmi eux qu'il a choisi celui à qui il a confié le bonheur de sa fille, et qui a partagé avec elle les soins pieux dont il a été entouré dans sa vieillesse et sa longue maladie.

» Tous ceux d'entre nous qui ont eu le bonheur de connaître Lamé l'aimaient pour les excellentes qualités de son cœur, autant qu'ils l'admiraient pour les grandes et brillantes facultés de son esprit. Sa mémoire, dont nous ne séparerons pas celle de Clapeyron, restera en vénération dans le Corps des ingénieurs des Mines. »

DISCOURS DE M. PUISEUX.

« En présence de cette tombe qui va se refermer sur une de nos gloires scientifiques, vous permettrez aux professeurs de la Faculté des Sciences de Paris d'exprimer la douleur que leur cause la perte d'un collègue vénéré. Chargé de leur servir d'organe, j'essayerai de remplir cette pieuse mission en vous disant combien, parmi nous, les travaux de M. Lamé étaient admirés, et combien aussi était apprécié son noble caractère.

» Attiré vers les recherches spéculatives par la conscience de son génie, M. Lamé s'était, de bonne heure, donné tout entier à la science. Ses premières productions le placèrent au rang des maîtres. Laplace, Fourier, Poisson, venaient de fonder la théorie mathématique de la chaleur ; notre illustre collègue sut lui donner un nouvel essor. Il aborda victorieusement des questions qui avaient arrêté ses célèbres devanciers, et les méthodes fécondes qu'il imagina pour les résoudre ne servirent pas seulement à perfectionner cette théorie particulière : elles ouvrirent une voie nouvelle dans les recherches de Géométrie et de Physique mathématique. Admirablement écrits d'ailleurs, ces premiers Mémoires de M. Lamé peuvent être cités, aussi bien que les Ouvrages qui les ont suivis, comme des chefs-d'œuvre de rigueur et de netteté, comme de vrais modèles du style scientifique.

» La Physique mathématique, cette science de création toute moderne, a été l'objet principal et préféré des recherches de M. Lamé, et, bien que nous lui devions des travaux très-importants sur d'autres

sujets, notamment sur la théorie des nombres, il est toujours revenu à ses études de prédilection. Il y était rappelé d'ailleurs par son enseignement, et les leçons qui avaient captivé son auditoire de la Sorbonne devenaient la matière d'excellents Traités, où presque tout est original, et qui ont puissamment contribué à l'avancement des hautes études mathématiques.

» M. Lamé avait cette passion de la vérité scientifique qui enfante les découvertes; les progrès de la science excitaient chez lui un vif enthousiasme; il rêvait une époque où les lois primordiales du monde matériel se dévoileraient à nos yeux; il entrevoyait, et il aimait à le croire prochain, le moment où l'esprit humain, guidé par l'Analyse mathématique, tirerait d'un petit nombre de principes certains l'explication rationnelle des phénomènes physiques. Même à ses dernières leçons, lorsque les infirmités amenées par l'âge et le travail inspiraient déjà de vives craintes aux admirateurs de son talent, M. Lamé retrouvait, dans la contemplation de ses belles perspectives, une ardeur toute juvénile, et il la faisait partager à ses auditeurs.

» Aussi M. Lamé n'a pas seulement écrit des Mémoires et des Livres d'une importance capitale dans la science; il a formé des disciples, et, parmi les travaux des jeunes géomètres d'aujourd'hui, il en est bien peu qui ne portent la trace de l'heureuse influence exercée par l'éminent professeur.

» Il accueillait d'ailleurs les débutants avec une bienveillance qu'ont éprouvée plusieurs de ceux qui m'entendent et dont j'ai gardé pour ma part un précieux souvenir. Il leur apprenait, par son exemple, à chercher dans la vie autre chose que la fortune et la satisfaction des ambitions vulgaires; il les encourageait en même temps par la bonté avec laquelle il accueillait leurs travaux, dès qu'il y apercevait quelque mérite. De tels hommes sont rares, et leur perte est pour nous un bien juste sujet d'affliction. Mais la Providence, qui les a suscités pour nous servir de modèles, les récompense sans doute, dans un monde meilleur, du noble usage qu'ils ont fait de leurs hautes facultés. C'est dans cet espoir que j'adresse à notre regretté collègue un suprême adieu. »

COURS DE MATHÉMATIQUES DU COLLÉGE DE FRANCE PENDANT LE SECOND SEMESTRE.

Mécanique céleste. — M. *Serret,* membre de l'Institut, continuera à traiter du mouvement de rotation de la Terre autour de son centre de gravité. Il étudiera ensuite les effets de la précession et de la nutation sur les positions apparentes des astres.

Les mardis et les vendredis à 10 heures.

Mathématiques. — M. *Liouville,* membre de l'Institut, continuera à traiter de diverses questions d'analyse.

Les lundis et samedis, à 10 heures.

Physique générale et mathématique. — M. *Bertrand,* membre de l'Institut, continuera à traiter des lois mathématiques relatives à la transformation des forces physiques.

Les mardis et vendredis, à midi.

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une lettre de M. O. Hesse. — ... La citation que vous faites à la page 15 du *Bulletin* me remet en mémoire un travail de jeunesse dans lequel j'avais revêtu d'une forme peu élégante un théorème en réalité digne d'intérêt. Mais si l'on énonce ce théorème comme il suit :

« Six quelconques des huit points d'intersection de trois surfaces » du second ordre peuvent être considérés comme les sommets d'un » hexagone gauche. Les trois droites menées d'un point quelconque » de l'espace et telles que chacune d'elles rencontre deux côtés op» posés de l'hexagone déterminent, si l'on joint leurs points d'inter» section avec les côtés de l'hexagone dans l'ordre même de ces côtés, » un nouvel hexagone inscrit dans le premier *et dont les côtés se trou» vent toujours sur un hyperboloïde.* Les deux hexagones inscrits, » formés de cette manière avec le septième et le huitième point d'in» tersection des trois surfaces, sont situés sur le même hyperbo» loïde »,

on n'hésitera pas à le placer sur le même rang que le théorème de Pascal.

De même que le théorème de Pascal suffit à la construction d'un

sixième point d'une conique, quand cinq points sont déjà donnés, de même le théorème précédent, en supposant connues les propriétés de l'hyperboloïde, apprend à construire *linéairement* le huitième point d'intersection de trois surfaces, quand les sept premiers sont donnés.

Il existe certainement aussi, entre dix points d'une surface du second ordre, une relation géométrique semblable, facile à énoncer....

Munich, 30 avril 1870.

D[r] OTTO HESSE.

Dans notre Compte rendu du *Journal de Mathématiques pures et appliquées,* nous avions attribué à M. Liouville l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tang} x}{1+x}\,dx = \frac{\pi}{8}\log 2.$$

M. CATALAN nous écrit que cette formule n'est pas nouvelle; il l'a déjà donnée dans un Mémoire dont voici le titre : *Mémoire sur la transformation des séries et sur quelques intégrales définies,* présenté à l'Académie royale de Belgique le 1[er] avril 1865. La seconde partie de cet élégant travail contient les valeurs d'un assez grand nombre d'intégrales définies, toutes déduites de l'intégrale définie déterminée autrefois par MM. Bertrand et Serret. (*Journal de M. Liouville*, t. VIII, p. 110; t. IX, p. 436.)

Nous profitons de l'occasion pour indiquer quelques autres Mémoires que le nom de M. Catalan recommande suffisamment à l'attention des géomètres.

Remarques sur l'équation $x^n - 1 = 0$. (Extrait des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique,* 2[e] Série, t. XXIX, n° 3, 1870.)

Sur les roulettes et les podaires. (Même *Bulletin*, 2[e] Série, t. XXVII, n° 2, 1869.)

Sur l'addition des fonctions elliptiques de première espèce. (*Ibid.*)

Jury du Concours quinquennal des Sciences physiques et mathématiques. Période de 1864-68. Rapport à M. le Ministre de l'Intérieur. Ce Rapport contient principalement une analyse des beaux travaux de M. Plateau, que le Jury a proposé pour le prix quinquennal.

Sur quelques sommations et transformations des séries. (Extrait des *Atti dell' Accademia pontificia de' Nuovi Lincei*, t. XXIII, séance du 1[er] mai 1870.)

M. Mannheim nous communique l'énoncé du théorème suivant :

« Si l'on transforme une surface par la méthode des polaires ré- » ciproques, les lignes asymptotiques se transforment en lignes » asymptotiques, ou plutôt aux lignes asymptotiques d'une surface » correspondent les développables formées par les tangentes aux » lignes asymptotiques de la réciproque. »

Ce théorème est l'équivalent du suivant, qui est sans doute connu de tous ceux qui étudient sérieusement la Géométrie, mais qu'on n'énonce pas d'habitude.

« La définition des tangentes d'inflexion (tangentes coupant la » surface en trois points consécutifs) est dualistique. Une tangente » quelconque ne coupe la surface qu'en deux points consécutifs, et » aussi on ne peut mener par cette droite que deux plans tangents à » la surface, confondus avec celui qui la contient. Au contraire, si » la tangente coupe la surface en trois points consécutifs, *trois* plans » tangents menés par cette droite à la surface se confondront avec » celui qui la contient. »

Le théorème de M. Mannheim trouve d'ailleurs une belle application dans l'étude de la surface des ondes, qui, comme on le sait, a ses deux nappes réciproques l'une de l'autre par rapport à un ellipsoïde.

G. D.

M. Ph. Gilbert, professeur à l'Université de Louvain, nous envoie un Mémoire présenté à l'Académie de Belgique, le 9 octobre 1869, sous le titre :

Sur une propriété des déterminants fonctionnels et son application au développement des fonctions implicites.

On trouvera démontrée dans cet élégant travail la formule que nous avions proposée dans une Note insérée aux *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXVIII, 1869, p. 134, et qui est destinée à remplacer la formule plus compliquée de Laplace. A ce propos, nous communiquons à nos lecteurs une remarque que nous devons à M. Hermite : *La formule qui donne le terme général de la série de Laplace n'est pas exacte pour les premiers termes du développement.*

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Hermann. — Kritik Newton'scher Astronomie. Gr. in-16. Rostock, Stiller. $\frac{1}{6}$ Thlr.

Jeans (H.-W.). — Nautical Astronomy and Navigation. New edit. Parts 1 and 2. 1 vol. royal 8. London, Longmans. 14 sh.

Kepler (J.). — Opera omnia. Edidit Ch. Frisch. Vol. VIII. 1. Lex.-8. Frankfurt a. M., Heyder u. Zimmer. 3 $\frac{1}{2}$ Thlr.

Liber (H.), und *Lühmann* (F.-V.). — Geometrische Constructions-Aufgaben. Gr. in-8. Pyritz, Backe. $\frac{3}{4}$ Thlr.

Lockyer (N.). — Questions on Lockyer's Elementary Lessons in Astronomy, for the use of Schools, by J.-F. Robertson. In-18, 96 p. London, Macmillan. 1 sh. 6 d.

Lutterbeck (A.-B.). — Zeitberechnungstafeln. Gr. in-fol. Giessen, Ricker. $\frac{1}{4}$ Thlr.

Mädler (J.-H. von). — Reden und Abhandlungen über Gegenstände der Himmelskunde. In-8. Berlin, Oppenheim. 2 $\frac{2}{3}$ Thlr.

Mathematiske Formler til Brug ved Artium og anden Examen. Christiania, Lund. 6 sk.

Meynert (Th.). — Beiträge zur Kenntniss der centralen Projection der Sinnesoberflächen. Lex.-8. Wien, Gerold. 16 Ngr.

Nautical Magazine for 1869. In-8. London, Simpkin. 14 sh. 6 d.

Nördlinger (H.). — Würtembergisch-metrische Reduktionstafeln nebst Tabellen vierstelliger Logarithmen, Kreisflächentafel für Durchmesser von 1 bis 1000 und Verwandlungstabelle für die gewöhnlichsten Geldsorten. 2. Aufl. Gr. in-8. Stuttgart, Metzler. 16 Ngr.

Oppolzer (Th.). — Definitive Bahnbestimmung des Planeten (64) « Angelina. » Lex.-8. Wien, Gerold. 9 Ngr.

Petterson (C.-A.). — Lärobok i Navigations-Vetenskapen. Tredje upplagan. Efter författarens död utgifven af C. Skogman. In-8, 223 sid. och 1 karta. Stockholm, Norstedt och Söner. 5 rd.

Sabato (V.). — Elementi di Aritmetica. In-8, 216 p. Lecce, tip. Garibaldi. 3 fr. 50 c.

Sabato (V.). — Elementi di Geometria. In-8, 104 p. con 4 tav. Lecce, tip. Salentina. 2 fr. 50 c.

Sabato (V.). — Problemi geometrici. In-8, 24 p. Lecce, tip. Garibaldi. 60 c.

Schlotke (J.). — Stereoskopische Figuren. Ein Anschauungsmittel zum Gebrauche beim Studium der Stereometrie und sphärischen Trigonometrie. In-8. In Carton. Hamburg, Friederichsen. 1 Th. 6 Ngr.

Smith (J.-H.). — A Treatise on Elementary Algebra, for use of Colleges and Schools. Post-8, 390 p. London, Rivingtons. 6 sh. 6 d.

Smith (J.-H.). — A Treatise on Elementary Statics. 2d edit., royal-8, 100 p. London, Rivingtons. 5 sh. 6 d.

Sonnet (H.). — Premiers éléments de Calcul infinitésimal à l'usage des jeunes gens qui se destinent à la carrière d'ingénieur. In-8, 363 pages. Paris, Hachette. 6 fr.

Theorell (A.-G.).—Proportionslärans elementer. In-8, 39 sid. Stockholm, Haeggström. 50 öre.

Ulffers (D.-W.). — Praktische Anleitung und Tafeln zur Berechnung von Dreiecks-, Vierecks-, und Polygon-Netzen ohne Logarithmen. 4. Aufl. Gr. in-8. Koblenz, Baedeker. 2 Thlr.

RECTIFICATION.

Dans notre article sur l'important ouvrage de M. Serret (Paul), *Géométrie de direction*, nous avions attribué à M. Hesse la priorité, non de la méthode, mais d'un théorème donné par M. Serret et relatif à 6 points sur une conique (*voir* p. 11). Ce théorème se trouve, en effet, dans les *Vier Vorlesungen aus der analytischen Geometrie* de M. Hesse, mais il avait déjà été publié par M. Paul Serret dans une suite d'articles insérés aux *Nouvelles Annales de Mathématiques*, en 1865. Le petit Traité de M. Hesse ne date que d'octobre 1866. Nous demandons pardon à nos lecteurs et à M. Serret de l'erreur involontaire que nous avons commise; nous n'osons pas répondre, malgré les soins que nous apportons à cette publication, de l'exactitude de toutes les indications si nombreuses qu'il nous faut donner régulièrement. En tous cas, nous accueillerons avec reconnaissance toutes les rectifications qu'on voudra bien nous indiquer.

G. D.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

OPPOLZER (Th.). — Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten. Erster Band. — Gr. in-8°: 1870. Leipzig, Verlag von W. Engelmann. Pr. : $4\frac{2}{3}$ Thlr.

M. Oppolzer vient de publier la première Partie de ses *Leçons d'Astronomie* à l'Université de Vienne; cette Partie a pour objet la détermination de l'orbite d'un corps céleste, comète ou planète, d'après trois ou quatre observations.

Ce problème a, comme on sait, provoqué les recherches des plus grands géomètres et astronomes : au commencement de ce siècle, Gauss en a donné, dans le cas des planètes, une solution merveilleuse de simplicité, d'élégance et de précision; c'est en grande partie d'après la méthode de Gauss qu'ont été calculées les orbites des cent dix petites planètes découvertes jusqu'ici entre Mars et Jupiter. Divers perfectionnements ont été successivement apportés à la méthode par les astronomes qui s'occupaient de ces recherches. M. Oppolzer les reproduit avec soin, et propose lui-même une nouvelle méthode pour la détermination de l'orbite d'une planète d'après trois ou quatre observations; dans les cas où il l'a appliquée, elle l'emporte, au point de vue de la précision et de la rapidité, sur celle de Gauss. Ne serait-ce donc qu'à ce titre, son Ouvrage ne fait pas double emploi avec le livre très-soigné publié récemment sur le même sujet par Watson (*); il est appelé à rendre des services utiles aux amis de l'Astronomie; aussi pensons-nous qu'on désirera voir paraître le plus promptement possible la seconde Partie, celle où l'auteur exposera la correction des éléments de l'orbite d'après un grand nombre d'observations, et en tenant compte des perturbations *spéciales* produites par les planètes voisines du corps céleste que l'on considère.

Nous allons essayer de donner une idée des matières traitées dans le premier volume.

La première Partie (partie préparatoire) s'étend jusqu'à la page 92; l'auteur y définit d'abord avec précision les éléments des orbites des comètes, sans faire de distinction entre le mouvement direct et le mouvement rétrograde, en comptant l'inclinaison de zéro à 180 de-

(*) Watson, *Theorical Astronomy*; Philadelphie, 1868.

grés; il met en regard les éléments de deux orbites, exprimés dans ce système et dans l'ancien, où l'on spécifie la nature du mouvement, direct ou rétrograde. Il s'occupe ensuite de la transformation des coordonnées écliptiques en équatoriales ou inversement, donne des exemples numériques, et indique les précautions à prendre, dans certains cas, pour obtenir toujours la plus grande précision, par exemple quand les latitudes sont très-faibles. Il rappelle les formules pour passer des coordonnées géocentriques aux héliocentriques et les formules inverses, celles qui permettent de tenir compte de la parallaxe, quand on connaît la distance de l'astre à la Terre, ou, quand on ne la connaît pas, en introduisant, dans ce dernier cas, le *lieu fictif*; en opérant ainsi, on a l'avantage de pouvoir tenir compte tout de suite de la latitude du Soleil.

Pour le mouvement dans l'orbite parabolique, nous trouvons, à la fin du volume, la Table de Barker légèrement modifiée; c'est la Table V, qui donne la valeur de $M = \frac{t}{q^{\frac{3}{2}}}$ pour les valeurs de v comprises entre zéro et 30 degrés, et variant de minute en minute, et les valeurs de $\log M$, quand v est compris entre 30 et 175 degrés; la Table VI permet d'appliquer la méthode de Bessel, quand l'anomalie vraie est trop forte, plus grande que 167 degrés, et elle est alors d'un emploi plus commode que la Table de Barker.

Pour les orbites voisines de la parabole, nous voyons mentionnées les méthodes de Bessel et de Brünnow, tandis que celle de Gauss y est traitée en détail et avec des exemples numériques; l'application de cette méthode est facilitée par l'emploi des Tables V et VII.

Les derniers Chapitres de la première Partie ont en vue les corrections de précession, nutation et aberration.

Nous arrivons à la deuxième Partie, la détermination des orbites, et d'abord celle des orbites paraboliques.

Cinq données suffisant pour déterminer une orbite parabolique, la seconde observation sera employée seulement à fournir une relation entre les deux quantités nécessaires à fixer la position d'un grand cercle auxiliaire passant par le second lieu observé. L'auteur expose les relations connues provenant de ce que les trois positions de la comète sont dans un plan passant par le Soleil, et il en tire l'équation

$$\rho''' = m + M\rho',$$

m et M étant des fonctions des quantités observées et des secteurs triangulaires compris entre le Soleil et les positions de la comète prises deux à deux.

Il démontre ensuite l'équation d'Euler (appelée d'ordinaire l'*équation de Lambert*), reproduit une transformation élégante d'Encke relative à cette équation, et qui permet de calculer aisément la corde comprise entre deux positions de la comète, quand on connaît les distances de ces positions au Soleil et le temps que la comète emploie à passer de l'une à l'autre. Il développe en séries les expressions des secteurs triangulaires, détermine l'ordre de petitesse des divers termes, et montre très-bien qu'on aura la précision désirable si l'on assujettit le grand cercle auxiliaire à passer par le lieu moyen du Soleil; c'est la méthode d'Olbers qui donne $m = 0$, et simplement $\rho''' = \mathrm{M}\rho'$. Si le grand cercle dont on vient de parler coïncide à peu près avec celui qui passe par les positions extrêmes de la comète, la quantité M se présente presque sous la forme $\frac{0}{0}$; elle est mal déterminée. C'est le cas d'exception de la méthode d'Olbers. M. Oppolzer cherche à déterminer M le mieux possible par un choix convenable du grand cercle, et, au lieu de le faire passer par le lieu moyen du Soleil, il trouve qu'il faut le prendre perpendiculaire au grand cercle mené par les positions extrêmes de la comète. Mais alors il perd la forme simple d'Olbers; m n'est plus nul, et il a

$$\rho''' = m + \mathrm{M}\rho'.$$

Cela constitue donc une méthode qu'il propose pour remplacer celle d'Olbers, mais seulement dans le cas d'exception.

En cherchant, d'après Clausen, avec quelle précision se trouvent déterminés les éléments dans la méthode d'Olbers, il montre que la sienne (pour le cas d'exception) est de beaucoup préférable à celles qu'ont proposées pour le même cas Encke et Klinkerfues.

Puis vient le calcul de ρ' par une série d'hypothèses et d'interpolations; les formules sont appliquées à la comète III de 1867 d'après la méthode d'Olbers et d'après celle de l'auteur. On trouve ensuite le calcul usuel des éléments à l'aide de ρ' et ρ''', et le moyen de faire une première correction de l'orbite, quand le lieu moyen calculé ne coïncide pas avec le lieu moyen observé; on modifie convenablement la valeur de M.

Enfin l'auteur traite avec facilité une question intéressante, la

détermination de l'orbite parabolique d'un essaim d'étoiles filantes, d'après la connaissance du point radiant.

Détermination de l'orbite d'une planète d'après trois observations : Méthode de Gauss. — M. Oppolzer arrive rapidement, avec Gauss et Hansen, à l'équation

$$K\cos\beta''\rho'' = b_0 + \frac{c_0 Q}{r''^3},$$

où K, β'', b_0, c_0 sont des fonctions des données de l'observation ; le développement en série de Q lui montre que, dans la première approximation, on peut prendre

$$Q = \tau'\tau''',$$

et même il ajoute, avec Encke, un petit terme de l'ordre de ceux négligés, mais qui est souvent plus sensible, et du reste aisé à calculer.

Les cas d'exception de la méthode de Gauss sont exposés avec détail ; avant tout, les intervalles des observations ne doivent pas être trop petits ; dans le cas d'une planète, il faut généralement que le mouvement géocentrique soit d'au moins 1 ou 2 degrés, et 4 degrés dans le cas d'une comète. Il faut, en second lieu, que le grand cercle qui passe par les positions extrêmes de la planète et celui qui contient les lieux moyens de la planète et du Soleil ne se coupent pas sous un angle trop voisin de zéro ou de 180 degrés. C'est cet angle, en quelque sorte le poids de la détermination de l'orbite, que M. Hansen voudrait toujours voir figurer à côté des éléments. M. Oppolzer propose avec raison de prendre pour criterium le produit du sinus de l'angle précédent par le sinus de la distance des lieux moyens de la planète et du Soleil. En dernier lieu, les latitudes de la planète ne doivent pas être trop petites.

L'auteur donne des formules qui ne sont pas sujettes à exception, tout en étant assez simples, pour déduire ρ' et ρ''' de ρ'' supposé connu.

Il fait voir ensuite, d'après V. Knorre, que, dans les hypothèses successives, on peut se contenter de faire varier Q, sans changer en meme temps P et Q, comme le fait Gauss. La suite du calcul est à peu près la même que dans le *Theoria motus ;* mentionnons cependant la fraction continue de M. Hansen, qui très-souvent offre le moyen le plus expéditif pour le calcul de $\eta - 1$.

Vient ensuite un résumé des formules, avec distinction du cas où

l'orbite est complétement inconnue (et où l'on ne peut pas corriger d'abord de l'aberration) et de celui où elle est approximativement connue, et enfin une application numérique à la planète Elpis.

Citons encore la détermination des éléments dans le cas d'une orbite voisine de la parabole, et son application à la comète III de 1862.

Détermination de l'orbite d'une planète d'après trois observations : Méthode de M. Oppolzer. — L'auteur a trouvé une nouvelle solution qui lui semble surpasser les méthodes connues sous le rapport de la précision et de la rapidité. Ainsi, dans l'exemple de Cérès rapporté par Gauss, et où l'on embrasse un intervalle de temps de deux cent soixante jours, la convergence des approximations est si faible, que, après trois hypothèses, le résultat n'est pas satisfaisant; grâce à un calcul d'interpolation, la quatrième hypothèse approche assez de la vérité; néanmoins une cinquième est encore nécessaire, et, sans le calcul d'interpolation, il n'aurait pas fallu moins de neuf hypothèses. Dans la nouvelle méthode, deux hypothèses suffisent le plus souvent, et la troisième donne toute la précision qu'on peut espérer avec les Tables à sept décimales. Les calculs préparatoires sont moins longs, et chaque hypothèse ne demande pas plus de temps que dans la méthode de Gauss. A l'appui de ce qu'il avance, l'auteur reproduit *in extenso* le calcul de l'orbite de Cérès.

Indiquons en quelques mots l'esprit de la méthode. On a

$$\rho' = (\mathrm{I})' + (\mathrm{II})' x + (\mathrm{III})' xy,$$
$$\rho''' = (\mathrm{I})''' + (\mathrm{II})''' x + (\mathrm{III})''' xy,$$

les coefficients étant connus, et x et y ayant les valeurs

$$x = \frac{4}{(r' + r''')^3}, \quad y = \frac{r''' - r'}{r' + r'''}.$$

On néglige d'abord y et l'on suppose $x = 0,04$; on calcule ρ' et ρ''', puis r' et r''', et x; la valeur de x ne sera pas égale en général à $0,04$; par une série d'hypothèses et d'interpolations, et en tenant compte de y et de petites quantités négligées dans ρ' et ρ''', on arrive rapidement à la vraie valeur de x, y, ρ' et ρ''', après quoi on rentre dans les méthodes ordinaires.

L'auteur fait une application de ses formules à la planète Hélène.

Détermination d'une orbite d'après quatre observations. — C'est à

cette méthode qu'on doit avoir recours quand les latitudes sont petites; on a alors deux données de trop. Gauss met de côté les latitudes des observations extrêmes. M. Oppolzer, au contraire, regarde les observations extrêmes comme complètes, et, quant aux observations intermédiaires, chacune n'intervient que pour fournir une relation entre les quantités nécessaires à fixer les positions de deux grands cercles auxiliaires passant par les lieux moyens de la planète. Le sens de la méthode est semblable à celui de la nouvelle méthode dans le cas de trois observations. Les distances de la planète à la Terre, dans les positions extrêmes, sont encore exprimées en fonction des données de l'observation, et des deux inconnues x et y; puis on fait les hypothèses successives. Quant aux cercles auxiliaires, on les prendra généralement perpendiculaires sur l'écliptique. En opérant ainsi, le calcul n'est guère plus long que dans le cas de trois observations.

L'auteur fait un résumé des formules, et les applique à Vesta et Elpis.

F. Tisserand.

PAUL MANSION, docteur ès sciences physiques et mathématiques, chargé du cours d'Analyse infinitésimale à l'Université de Gand. — Théorie de la multiplication et de la transformation des fonctions elliptiques. *Essai d'exposition élémentaire.* — Gr. in-8°, 120 p. Paris, Gauthiers-Villars; et Gand, Hoste. Prix : 4f,50.

Depuis une quarantaine d'années, les fonctions elliptiques ont été l'objet de nombreux travaux, entrepris sur tous les points de cette belle théorie. Il serait très-désirable qu'un géomètre habile voulût bien consacrer ses soins à une œuvre d'exposition complète, destinée à remplacer l'Ouvrage trop ancien de l'illustre Legendre. Cette habitude d'écrire de grands Traités sur les différentes parties de la science paraît, malheureusement, perdue aujourd'hui; et, à part quelques heureuses exceptions, les géomètres éminents, loin d'imiter Euler, Lagrange, Laplace, Legendre, Monge, etc., préfèrent condenser le résultat de leurs recherches personnelles dans des Mémoires écrits souvent avec trop de concision et ne contenant que les résultats essentiels de leurs études. Pourtant, par suite du développement

actuel des travaux scientifiques, rien ne serait plus nécessaire aujourd'hui que ces Ouvrages complets, servant de point de repère aux érudits, et contribuant d'une manière considérable à l'instruction des géomètres et aux progrès des recherches ultérieures. Les Ouvrages de M. Salmon, pour ne citer qu'un exemple, n'ont pas seulement été utiles aux élèves; ils ont rendu, même aux savants, de véritables services, comme l'attestent les nombreuses citations qu'on rencontre dans tous les Recueils de Mémoires mathématiques.

Le livre dont nous avons à rendre compte traite seulement de la multiplication et de la transformation des fonctions elliptiques, et même l'auteur a volontairement laissé de côté, les réservant sans doute pour un autre Travail, un grand nombre de questions se rattachant à cette théorie, telles que la multiplication complexe, l'introduction dans la transformation des fonctions Θ, les équations différentielles auxquelles satisfont le numérateur et le dénominateur des fractions rationnelles qu'on rencontre dans cette étude. M. Mansion s'est proposé pour but principal de donner la démonstration rigoureuse et complète des formules relatives à *tous* les cas de la multiplication et de la transformation. Les principes relatifs aux fonctions imaginaires ont permis à MM. Briot et Bouquet d'introduire, dans l'exposition de ce problème, un haut degré de simplicité. M. Mansion s'est proposé d'atteindre le même résultat sans s'appuyer sur des théories aussi élevées, et en n'employant, à peu près comme l'a fait Abel, que le principe de la double périodicité et les règles élémentaires de l'Analyse. Son ouvrage, écrit avec une parfaite connaissance du sujet, sera donc très-profitable, notamment aux personnes qui ne connaissent les fonctions elliptiques que par les Traités élémentaires et qui désirent en faire une étude plus approfondie et plus détaillée.

Un grand nombre de notes et d'indications bibliographiques témoignent de l'érudition et du soin que l'auteur a apportés à son travail. Enfin une Introduction de 36 pages est consacrée à l'analyse des principaux écrits sur la multiplication et la transformation. Le lecteur pourra donc reconnaître sans effort les points de l'exposition qui appartiennent à l'auteur et ceux qu'il doit à ses prédécesseurs dans l'étude de cette belle question.

G. D.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

SITZUNGSBERICHTE DER MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN. — WIEN, in Commission bei Karl Gerold's Sohn (*).

T. LVIII, juin-décembre 1868.

LOSCHMIDT (J.). — *Le potentiel d'une masse électrique en mouvement déduit du potentiel d'une masse en repos.* (8 p.)

UNFERDINGER (Fr.). — *Sur quelques formules remarquables de Trigonométrie sphérique.* (5 p.)

MATZEK. — *Sur la construction du plan tangent à une surface de révolution.*

Construction des lignes d'intensité lumineuse déterminée sur les surfaces de révolution, au moyen des sphères tangentes.

BOLTZMANN (L.). — *Sur les intégrales des équations différentielles linéaires à coefficients périodiques.*

WEYR (E.) — *Sur les lignes de courbure des surfaces du second degré, et sur les systèmes confocaux de ces surfaces.* (24 p.)

SCHELL (A.). — *Théorie générale du planimètre polaire* (21 p., 1 pl.)

WEYR (E.). — *Généralisation du théorème de Desargues, avec des applications.*

SCHLESINGER (J.). — *Les surfaces projectives. Contribution à la constitution de la Géométrie descriptive dans le sens de la nouvelle Géométrie.* (8 p.)

BOLTZMANN (L.). — *Études sur l'équilibre de la force vive entre des points matériels en mouvement.* (44 p.)

LOSCHMIDT (J.). — *Mouvement de l'électricité dans le courant électrique.*

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie impériale des Sciences de Vienne*, Classe des sciences mathématiques et physiques. — Vienne, Carl Gerold fils.

Chaque année se compose de dix livraisons grand in-8. Publié en langue allemande.

Exner (S.). — *Sur le temps nécessaire pour la perception visuelle.* (32 p.)

Weyr (E.). — *Sur la génération des courbes du troisième ordre.* (12 p.)

Schlesinger (J.). — *Représentation des projections collinéaires et des principes projectifs sous une forme appropriée à la Géométrie descriptive.* (19 p.)

Oppolzer (Th.), Weiss et Řiha. — *Rapports sur l'Expédition autrichienne entreprise pour l'observation de l'éclipse totale de Soleil de l'année* 1868 *à Aden.* (5 art., 102 p., 2 pl.)

Mach (E.). — *Observations sur la stéréoscopie monoculaire.*

Obermayer (A.). — *Expériences sur l'écoulement de l'argile plastique.* (19 p., 3 pl.)

Staudigl (R.). — *Application des projections centrales et parallèles dans l'espace à la résolution de divers problèmes sur les surfaces du second ordre.* (20 p.)

Niemtschik (R.). — *Procédé simple pour mener, par des points extérieurs, des normales aux surfaces du second ordre.*

Staudigl (R.). — *Constructions diverses, relatives aux surfaces du second degré, exécutées à l'aide des surfaces coniques et cylindriques.* (12 p.)

Winckler (A.). — *Sur les intégrales abéliennes complètes.* (39 p.)

Boltzmann (L.). — *Solutions d'un problème de Mécanique.* (10 p.)

Stolz (O.). — *Sur les caractères distinctifs des maxima et des minima des fonctions de plusieurs variables.* (18 p.)

T. LIX, janvier-mai 1869.

Handl (A.). — *Théorie du baromètre à balance.* (10 p.)

Niemtschik (R.). — *Sur la construction des points d'intersection des cercles et des sections coniques.* (9 p.)

Weyr (E.). — *Construction du cercle de courbure des courbes podaires.* (8 p.)

Staudigl (R.). — *Construction de l'ellipse.* (12 p.)

Winckler (A.). — *Sur quelques questions d'analyse élémentaire.* (39 p.)

Loschmidt (J.). — *Le second théorème de la théorie mécanique de la chaleur.* (24 p.)

Unferdinger (Fr.). — *Sur les deux intégrales générales*

$$\int x^n \cos[m \log(a + bx)]\,dx, \quad \int x^n \sin[m \log(a + bx)]\,dx,$$

et sur quelques formules qui s'y rattachent. (18 p.)

Unferdinger (Fr.). — *Différentes manières de mettre le produit*

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2)\ldots(a_{n-1} + b_{n-1}^2 + c_{n-1}^2 + d_{n-1}^2),$$

sous forme d'une somme de quatre carrés. (10 p.)

Unferdinger (Fr.). — *Sur les caractères de divisibilité des nombres.*

Militzer (H.). — *Détermination des constantes d'un élément galvanique.* (9 p.)

Niemtschik (R.). — *Construction des points d'intersection de deux sections coniques.* (14 p.)

Winckler (A.). — *Sur le reste de la série de Taylor* (extrait). (16 p.)

Littrow (K. von). — *Dénombrement des étoiles boréales du Catalogue de Bonn d'après leurs grandeurs.* (28 p.)

M. de Littrow fait suivre son Catalogue de calculs sur la distribution probable des étoiles dans l'espace, en les supposant à des distances égales les unes des autres. Ces considérations le conduisent à des conclusions à peu près conformes à celles de W. Herschel.

Schlesinger (J.). — *Représentation des projections collinéaires dans l'espace par des transformations orthogonales.* (9 p., 1 pl.)

Boltzmann (L.). — *Sur la résistance de deux cylindres creux superposés.* (10 p.)

Stefan (J.). — *Sur les formules fondamentales de l'électrodynamique.* (77 p.)

Étude sur la loi d'action de deux éléments de courant donnée par Ampère.

WALTENHOFEN (A. von). — *Sur les limites de l'aimantation du fer et de l'acier.* (9 p.)

OPPOLZER (Th.). — *Rapport sur l'Expédition autrichienne pour l'observation de l'éclipse totale de Soleil de* 1868 *à Aden. — VI. Coordonnées géographiques d'Aden.* (15 p.)

T. LX, juin-juillet 1869.

BOLTZMANN (L.). — *Sur l'action électrodynamique mutuelle des parties d'un courant électrique de forme variable.* (19 p., 1 pl.)

KIECHL (Fr.). — *Essais pour déterminer l'équivalent calorique de l'électricité* (19 p.)

En prenant pour unité d'électricité la quantité capable d'extraire de l'eau 1 gramme d'hydrogène à zéro centigrade et $0^{m},760$ de pression, on demande le nombre des unités de chaleur qui peuvent être produites par l'emploi de cette unité d'électricité. Ce nombre est identique avec la chaleur de combustion de 1 gramme d'hydrogène (à zéro et $0^{m},760$) dans l'oxygène, sous la condition que la vapeur produite soit transformée en eau à zéro. La moyenne des expériences conduit au nombre 33653.

WEISS (E.). — *Rapport sur l'Expédition autrichienne pour l'observation de l'éclipse totale de Soleil de* 1868 *à Aden. — VII. Observations d'étoiles filantes à Aden.* (15 p., 1 pl.)

WINCKLER (A.). — *Sur quelques intégrales multiples.* (9 p.)

Réduction de certaines intégrales multiples, portant sur des fonctions exponentielles.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, publiés par MM. les Secrétaires perpétuels (*). T. LXX.

N° 16. Séance du 18 avril 1870.

M. MOUTARD. — *Recherches sur les équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes.* (Mémoire présenté.)

L'Extrait inséré nous permet de donner à nos lecteurs une idée

---

(*) Voir *Bulletin*, p. 154.

des résultats obtenus par M. Moutard. Ce géomètre a entrepris l'étude minutieuse de la forme la plus élémentaire dont soit susceptible l'intégrale générale des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, à savoir : celle qui consiste en une relation unique entre les trois variables, deux fonctions arbitraires de quantités distinctes formées explicitement avec les trois variables, et les dérivées en nombre limité de ces fonctions arbitraires, les arbitraires n'entrant d'ailleurs sous aucun signe d'intégration.

Dans la première Partie de son Mémoire, M. Moutard donne la forme générale des équations aux dérivées partielles de la forme précédente, et indique comment on peut en effectuer l'intégration. La question est ramenée dans cette première Partie à l'intégration d'une équation linéaire de Laplace.

Dans la deuxième Partie, l'auteur construit l'équation de Laplace la plus générale, susceptible d'être intégrée entièrement sous forme finie, avec deux fonctions arbitraires et leurs dérivées en nombre déterminé m et n.

Enfin, dans la troisième Partie de son Mémoire, M. Moutard examine les équations particulières de la forme

$$\frac{d^2 z}{du\,dv} = \mathrm{A}(u, v) z$$

et cherche dans quel cas on peut en déterminer l'intégrale en termes finis. Il a trouvé la solution complète de ce problème, qui se présente dans plusieurs recherches géométriques.

Au reste, nous aurons l'occasion de revenir sur cette importante étude, quand elle aura été publiée.

M. G. Quesneville. — *Remarque relative à une Note M. C. Flammarion sur la loi du mouvement de rotation des planètes.*

N° 17. Séance du 25 avril 1870.

M. Delaunay. — *Découverte d'une petite planète à l'Observatoire de Marseille.*

M. Faye. — *Sur l'observation spectrale des protubérances solaires.* (Travaux de M. Respighi.)

M. Faye. — *Sur les procédés d'observation photographique proposés par M. Paschen pour le prochain passage de Vénus.*

M. DE SAINT-VENANT. — *Comparaison des évaluations de la poussée des terres par la considération rationnelle de l'équilibre limite, et par l'emploi du principe dit* de moindre résistance, *de Moseley.*

M. DURRANDE. — *Sur les surfaces du quatrième ordre.*

M. FLAMMARION. — *Réponse à une observation relative à la loi du mouvement de rotation des planètes.*

M. CHASLES. — *Nouvel énoncé d'un théorème de M. Spottiswoode.*

« Chaque point d'une surface est sextactique en dix des sections faites par les plans d'un faisceau dont l'axe passe par le point. »

M. Spottiswoode entend par sextactique un point d'une courbe qui admet une conique osculatrice au cinquième ordre. C'est l'expression dont il s'est servi, ainsi que M. Cayley, dans plusieurs Mémoires importants.

Sous cette nouvelle forme, le théorème est à l'abri des objections que nous lui avons adressées. (Voir *Bulletin*, p. 155.)

M. CHASLES fait hommage à l'Académie, de la part de M. *Cremona,* d'un Mémoire en italien, extrait des *Comptes rendus de l'Institut royal Lombard* (2e série, t. III) sur les 27 droites d'une surface de troisième ordre, sujet qui, depuis quelques années, n'a pas cessé d'occuper les géomètres, et sur lequel M. *C. Jordan*, notamment, a adressé quelques Communications à l'Académie (*Comptes rendus,* 12 avril 1869, p. 865; 14 février 1870, p. 326), que cite M. Cremona.

N° 18. Séance du 2 mai 1870.

M. le Président informe l'Académie de la perte qu'elle vient de faire dans la personne de M. Lamé, décédé le 1er mai.

M. l'abbé AOUST — *Sur les roulettes en général.*

L'auteur étudie le roulement d'une courbe gauche sur une autre défini par la condition qu'à chaque instant les plans osculateurs des deux courbes au point de contact coïncident. Le mouvement de la courbe mobile rentre donc dans la classe de ceux qui se composent d'une suite de rotations. Il nous semble qu'on peut obtenir de tels mouvements d'une manière générale, en faisant rouler sur une surface gauche une surface gauche applicable sur la première, de manière qu'à chaque instant les génératrices correspondantes coïn-

cident. Alors toute ligne géodésique de la surface mobile roulerait sur la géodésique correspondante de la surface fixe, suivant le mode indiqué par M. l'abbé Aoust. Les théorèmes intéressants que donne d'ailleurs ce géomètre comprennent comme cas très-particuliers ceux qu'on connaissait déjà sur les roulettes planes et sphériques.

M. Breton (de Champ). — *Sur les lignes de plus grande pente à déclivité maximum ou minimum.*

L'auteur démontre que de telles lignes ont toujours pour projection horizontale une ligne droite.

N° 19. Séance du 9 mai 1870.

M. Mannheim. — *Quelques résultats obtenus par la considération du déplacement infiniment petit d'une surface algébrique.*

« Steiner, dans un *Mémoire sur les courbes et les surfaces algébriques* (*), a cherché le nombre des normales qu'on peut abaisser d'un point sur une courbe algébrique ou sur une surface algébrique. Pour une courbe de degré m, il arrive de trois manières à montrer que, d'un point, on peut mener à cette courbe m^2 normales. Son premier procédé consiste à déplacer infiniment peu la courbe autour du point donné; les m^2 points d'intersection de la courbe considérée dans sa première position et dans sa position voisine, sont les pieds des normales cherchées.

» Steiner n'a pas étendu ce procédé au cas de l'espace. M. August a fait connaître cette généralisation (**); il considère pour cela deux déplacements infiniment petits autour de deux droites quelconques issues du point où l'on veut mener les normales.

» Je me propose de montrer comment, dans l'espace, l'emploi de déplacements infiniment petits conduit non-seulement au nombre de normales qu'on peut abaisser d'un point sur une surface algébrique, mais encore à quelques autres résultats nouveaux. »

Après les quelques lignes qui précèdent et qui forment le début de la Communication de M. Mannheim, nous indiquerons les théorèmes suivants :

« Les pieds des normales abaissées de tous les points d'une droite sur une surface de degré m appartiennent à une courbe de degré m^2.

(*) *Journal de Crelle*, t. XLIX; — *Journal de M. Liouville*, t. XX.

(**) *Journal de Crelle-Borchardt*, t. LXVIII, p. 242.

» Les normales forment une surface gauche d'ordre m^3.

» Il y a donc m^3 normales rencontrant deux droites.

» Il y a $m^3\alpha\beta$ normales rencontrant deux courbes d'ordres α et β. »

M. C. Jordan. — *Sur la division des fonctions hyperelliptiques.*

Nous citerons seulement le théorème suivant :

« Si l'on connaissait l'une des racines de l'équation X_n de la division en p parties égales des fonctions à $2n$ périodes, on obtiendrait les autres en résolvant : 1° une équation X_{n-1} analogue à celle de la division en p parties des fonctions à $2n-2$ périodes ; 2° une équation abélienne de degré $p-1$; 3° $2n-1$ équations abéliennes de degré p.

M. Allégret. — *Note sur l'existence de nouvelles classes renfermant chacune un nombre illimité de courbes algébriques planes, dont les arcs offrent une représentation exacte de la fonction elliptique de première espèce.*

M. Valson. — *Étude sur les actions moléculaires, fondée sur la théorie de l'action capillaire.*

TRANSACTIONS of the Cambridge Philosophical Society. — In-4°. T. XI, 1866-69.

Cayley (A.). — *Sur la théorie de l'involution.* (18 p.)

U, U′, U″... représentant des quantiques, et λ, λ′, λ″, ... des constantes, les quantiques sont dits en involution, s'ils satisfont à une équation linéaire de la forme

$$\lambda U + \lambda' U' + \lambda'' U'' + \ldots = 0.$$

En particulier le lieu de l'équation $U + kV = 0$ est en involution avec les lieux $U = 0$, $V = 0$. M. Cayley s'occupe surtout, dans ce Mémoire, des points singuliers du lieu $U + kV = 0$.

Cayley (A.). — *Sur un cas de l'involution des courbes du troisième degré.* (42 p.)

Ce Mémoire se rapporte à l'involution

$$xyz + k(x+y+z)^2(\lambda x + \mu y + \nu z) = 0.$$

Voir le Mémoire précédent, ainsi que les deux Mémoires du même

auteur : *On the Cubic Centres of a Line with respect to three Lines and a Line,* insérés dans le *Philosophical Magazine,* t. XX, p. 418-423 (1860), et t. XXII, p. 433-436 (1861).

Cayley (A.). — *Sur la classification des courbes du troisième degré.* (48 p., 2 pl.)

Exposition des classifications établies par Newton, Stirling, Murdoch, puis, sur des bases nouvelles, par Plücker, dans son *System der analytischen Geometrie* (1835). L'auteur développe, plus que ne l'a fait Plücker, la théorie de la division en groupes.

Cayley (A.). — *Sur les cônes et les courbes du troisième degré.* (16 p.)

Ce Mémoire est consacré au développement du théorème établi par Newton dans son *Enumeratio linearum tertii ordinis*, que toutes les courbes du troisième degré peuvent être considérées comme des projections coniques des cinq paraboles divergentes.

De Morgan (A.). — *Sur l'infini et sur le signe d'égalité.* (45 p.)

De Morgan (A.). — *Théorème concernant les séries neutres.* (13 p.)

M. de Morgan appelle ainsi les séries telles que $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$, qui forment le passage entre les séries dont la somme converge vers une limite déterminée, et celles dont la somme croît à l'infini. La question qui fait l'objet de ce Mémoire est de savoir si une telle série ne provient pas toujours du développement d'une fonction qui, pour la valeur considérée de la variable, tend vers la limite $\frac{1}{2}$.

De Morgan (A.). — *Sur l'histoire des origines des signes + et —.* (10 p.)

Clifton (R.-B.). — *Note sur le Mémoire précédent.* (6 p.)

M. de Morgan a trouvé l'indication de ces signes dans un Ouvrage plus ancien de près de quarante ans que le livre de Rudolf, et publié en 1489 par Johannes Widman, d'Egra.

Todhunter (I.). — *Sur la méthode des moindres carrés.* (20 p.)

Laplace a étudié la méthode des moindres carrés dans sa *Théorie des probabilités,* pour les seuls cas de la détermination d'*un* et de *deux* éléments d'après un grand nombre d'observations, et il annonce, sans le justifier, que son analyse, déjà très-compliquée pour le cas de deux éléments, pourrait s'étendre à un nombre quelconque d'élé-

ments. M. Todhunter, dans son *Histoire du calcul des probabilités* (*), (p. 578), a présenté des recherches sur le cas général du problème, en se servant d'une méthode toute différente de celle que Laplace a employée pour deux éléments. Dans le présent Mémoire, il démontre un résultat remarquable, que Laplace n'avait fait qu'énoncer dans le premier *Supplément* à son Ouvrage. Il développe ensuite le procédé de Laplace relatif à deux éléments, et en déduit plusieurs résultats qui s'appliquent à des éléments en nombre quelconque.

De Morgan (A.). — *Sur la racine d'une fonction quelconque, et sur les séries neutres* (2e Mémoire). (28 p.)

Démonstration du théorème, que toute équation $\varphi(n) = 0$, dans laquelle $\varphi(n)$ peut se mettre sous la forme $P + Q\sqrt{-1}$, admet au moins une racine.

Cayley (A.). — *Sur certaines surfaces gauches.* (13 p.)

Le but de ce Mémoire est d'introduire certaines modifications aux considérations employées par M. J. de la Gournerie, dans son livre intitulé : *Recherches sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques, avec des notes par A. Cayley.* (In-8°, Paris, 1867.)

Cayley (A.). — *Sur les six coordonnées d'une ligne.* (34 p.)

En désignant par p, q, r, s, t, u les six déterminants que l'on peut former avec le tableau d'éléments

$$\left\| \begin{matrix} x, & y, & z, & w \\ \alpha, & \beta, & \gamma, & \delta \end{matrix} \right\|,$$

on a identiquement

$$ps + qt + ru = 0.$$

La considération du cône représenté par une équation homogène $V = 0$ entre les six coordonnées p, q, r, s, t, u a déjà conduit l'auteur, il y a plusieurs années, à de nombreux et importants résultats. Ces coordonnées sont les mêmes qu'a employées Plücker, dans son remarquable Mémoire : *On a new Geometry of Space* (*Phil. Trans.*, 1865, p. 725-791), mais en suivant une marche toute diffé-

(*) *A History of the Mathematical Theory of Probability from the Time of Pascal to that of Laplace.* Cambridge and London, 1865. In-8°, XVI-624 p. Prix : 18 shillings.

rente. *Voy.* encore le Mémoire de Lüroth : *Zur Theorie der windschiefen Flächen* (*Journal de Crelle-Borchardt*, t. LXVII, 1867, p. 130-152). M. Cayley applique ici ces coordonnées à la question de l'involution de six lignes.

Röhrs (J.-H.). — *Sur les efforts qu'éprouvent les pièces d'artillerie, et sur les vibrations des corps solides en général.* (36 p.)

Discussion de certaines équations, dont l'intégration permet d'estimer à peu près la quantité dont la tension d'une pièce de grosse artillerie, sous l'action de l'inflammation de la poudre, peut surpasser la tension qu'elle éprouverait si la pression des gaz pendant la combustion agissait suivant les lois de la statique. Recherche des moyens qui peuvent rendre un canon plus efficace, sans augmenter le risque de la rupture.

Boole (G.). — *Des propositions définies numériquement.* (16 p.)

Ce Mémoire posthume, communiqué par M. de Morgan, a trait à un ordre de questions philosophiques dont ce dernier s'est particulièrement occupé, et qui concernent la logique des sciences exactes.

Stokes (G.-G.). — *Supplément d'un Mémoire sur la discontinuité des constantes arbitraires qui se présentent dans les développements divergents.* (14 p.)

Les transformations exposées dans ce Mémoire sont, abstraction faite de la question de la discontinuité des constantes, des cas particuliers de celles qui sont contenues dans un Mémoire de M. Kummer. (*Journal de Crelle,* t. XV, 1836, p. 39-127.) Mais la discontinuité des constantes, qui forme le principal objet du présent Mémoire, a été complétement laissée de côté par le géomètre allemand.

Airy (G.-B.). — *Sur la décomposition en facteurs du trinôme* $x^n - 2\cos n\alpha + \frac{1}{x^n}$. (18 p.)

Adams (J.-C.). — *Note sur la décomposition en facteurs de* $x^n + \frac{1}{x^n} - 2\cos n\alpha$. (2 p.)

MEMORIE dell' Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna (*). — Serie seconda.

T. VII; 1868.

Cremona (L.). — *Préliminaires d'une théorie géométrique des surfaces.*

Mémoire divisé en deux Parties, dont la première a paru dans le tome précédent. (46-50 p.)

Chelini (D.). — *Usage du principe géométrique de la résultante dans la théorie des tétraèdres.* (20 p.)

Beltrami (E.). — *Sur les propriétés générales de la surface d'aire minimum.* (70 p.)

Résumé des travaux des divers géomètres sur ce sujet, précédé d'un historique très-complet de la question.

T. VIII; 1869.

Chelini (D.). — *De la courbure des surfaces, par une méthode directe et intuitive.* (50 p.)

Sacchetti (L.). — *Considérations sur l'origine de la théorie mécanique de la chaleur.* (14 p.)

Cremona (T.). — *Sur les surfaces gauches du quatrième degré.* (16 p.)

Chelini (D.). — *Théorie des coordonnées curvilignes dans l'espace et dans les surfaces.* (52 p.)

Beltrami (E.). — *Sur la théorie générale des paramètres différentiels.* (42 p.)

GIORNALE di matematiche. — 8e année. Janvier-février, mars-avril 1870 (**).

Isè (E.). — *Note sur la résultante de deux équations.* (27 p.; it.)

Exposition d'une méthode qui conduit à une règle pour écrire immédiatement la résultante de deux équations, l'une du degré *n*, l'autre

---

(*) Un volume par année, divisé en quatre fascicules, grand in-4. En langue italienne.

(**) Voir *Bulletin*, p. 152.

du deuxième ou du troisième degré. L'expression de la résultante est ordonnée suivant les puissances du terme connu de l'équation de degré inférieur, et a une forme telle, qu'elle n'admet pas de réductions ultérieures.

Calzolari (L.). — *Note sur l'équation* $u^2 = \mathrm{A}x^2 \pm \mathrm{B}y^2$. (7 p.; it.)

Démonstration d'un théorème différent de celui de Legendre, et qui non-seulement rend manifeste la possibilité ou l'impossibilité en nombres entiers de l'équation $u^2 = \mathrm{A}x^2 \pm \mathrm{B}y^2$, mais encore, sans recourir au procédé de Lagrange, présente l'avantage de déterminer pour x, y, u deux systèmes de valeurs, dont chacun sert ensuite à composer les formules de la solution générale.

Aschieri (F.) — *Sur un complexe du second degré.* (3 p.; it.)

L'objet de cette Note est une génération des complexes du second degré, dont l'équation peut se ramener à la forme particulière qui ne contient que les carrés des coordonnées de la ligne droite. L'auteur trouve que, pour tout complexe du second degré dont l'équation est réductible à la forme susdite, il existe une série simplement infinie de surfaces du second degré, que l'on peut faire correspondre deux à deux, de manière que le complexe lui-même soit ou le lieu géométrique des droites divisées harmoniquement par deux surfaces correspondantes, ou encore l'ensemble des droites qui déterminent, avec les plans tangents de ces surfaces correspondantes, des faisceaux harmoniques de quatre plans.

Battaglini (G.). — *Sur les formes ternaires quadratiques* (1re Partie). (22 p.; it.)

Ce Mémoire a pour objet la représentation des formes ternaires quadratiques. L'auteur commence par considérer le *continu* (*il continuo*) à deux dimensions d'une manière tout à fait abstraite et indépendante des conceptions géométriques. En supposant que l'on considère trois variables, et que l'on attribue à leurs rapports toutes les valeurs possibles, l'*ensemble* de ces valeurs est ce qui constitue le *continu* à deux dimensions. L'*élément* de ce continu est la *détermination* qui s'y opère par les valeurs attribuées aux rapports entre les variables, et les valeurs elles-mêmes de ces variables sont les *coordonnées* de l'élément. Le principe de dualité, qui coordonne par couples les propriétés du continu, résulte immédiatement de la con-

sidération d'une seconde espèce d'éléments, dont chacun a pour coordonnées les coefficients des variables dans une relation linéaire établie entre ces mêmes variables. Les deux espèces d'éléments du continu à deux dimensions sont distinguées, dans la représentation géométrique du continu, sous les noms d'éléments de *première classe* et d'éléments de *premier ordre*. D'une manière indépendante de toute considération géométrique, l'auteur définit encore les concepts : 1° de *triade fondamentale* d'éléments; 2° de coordonnées d'un élément *par rapport* à une triade quelconque; 3° de rapport *anharmonique* et *harmonique* entre deux couples d'éléments; 4° de couples en *involution*, et 5° de séries *équiharmoniques* d'éléments.

Après ces préliminaires, l'auteur passe à la discussion de la quadrique ternaire; en supposant qu'elle détermine dans le continu une série d'éléments de première classe, par la considération des couples d'éléments de la série *infiniment peu différents* entre eux, on déduit de la forme proposée une autre forme ternaire quadratique (la forme *conjointe* à la première), laquelle détermine dans le continu une série d'éléments de premier ordre, intimement liée à la série des éléments de première classe. Les formes ternaires quadratiques conjointes correspondent à la double représentation géométrique d'une forme ternaire, savoir : comme *locale*, ou comme *enveloppe* d'éléments. Ensuite, l'auteur s'occupe de trouver : 1° la condition pour qu'une forme quadratique ternaire puisse s'exprimer comme forme quadratique à deux variables, auquel cas la série d'éléments de première classe ou de premier ordre, représentée par la quadrique, se réduit à une couple d'éléments de premier ordre ou de première classe; et 2° la condition pour qu'une forme ternaire quadratique puisse s'exprimer au moyen d'une seule variable, auquel cas les éléments de la couple en question *coïncident* l'un avec l'autre.

Les considérations du *covariant* d'une forme ternaire quadratique, dit *émanant pur* de la forme par rapport à un élément, ou *émanant mixte* de la forme par rapport à une couple d'éléments, conduit l'auteur à établir les propriétés *harmoniques* de la forme ternaire relatives : 1° à l'élément de premier ordre ou de première classe, harmonique d'un élément de première classe ou de premier ordre par rapport à une quadrique (*pôle* et *polaire*); 2° aux couples d'éléments de premier ordre ou de première classe, harmoniques l'un de l'autre par rapport à une quadrique (*pôles conjugués* et *polaires conjuguées*); et

enfin 3° aux triades d'éléments conjuguées harmoniques par rapport à la même quadrique (triades de *pôles conjugués* et de *polaires conjuguées*).

Après avoir exposé quelques propriétés relatives aux éléments communs à une quadrique et à une forme linéaire, M. Battaglini passe au développement de la très-importante conception de Cayley [*Sixth Memoir on Quantics* (*Philos. Trans.*, vol. CXLIX, 18)], au moyen de laquelle on établit les relations métriques des figures sur une base entièrement analytique. En imaginant avec Cayley deux quadriques conjointes, auxquelles se rapportent tous les éléments de première classe et de premier ordre du continu, et qui constituent l'*absolu* du système, on peut, au moyen des coefficients de ces quadriques et des coordonnées de deux éléments (de première classe ou de premier ordre) composer une formule que l'on prend, par définition, comme expression analytique de l'*intervalle* entre ces deux éléments. Cette expression est caractérisée par la propriété que, pour trois éléments quelconques, de première classe ou de premier ordre, appartenant à un même élément de premier ordre ou de première classe, l'intervalle entre le premier et le second élément, ajouté à l'intervalle entre le second et le troisième, donne l'intervalle entre le premier et le troisième. De l'expression de l'intervalle on déduit : 1° que deux éléments de première classe ou de premier ordre, d'intervalle égal à un quadrant, sont conjugués harmoniques par rapport à l'absolu; 2° que l'intervalle entre deux éléments de première classe ou de premier ordre est égal à l'intervalle entre les deux éléments de premier ordre ou de première classe, harmoniques respectivement des deux premiers par rapport à l'absolu; 3° que par *intervalle* entre deux éléments, l'un de première classe, l'autre de premier ordre, on peut entendre le complément au quadrant de l'intervalle entre un des éléments proposés et l'élément harmonique de l'autre par rapport à l'absolu; et enfin 4° que tous les éléments à intervalle constant d'un élément donné constituent une quadrique (quadrique *circulaire*), qui a avec l'absolu deux couples d'éléments conjoints communs.

De tout cela, l'auteur déduit avec facilité la représentation géométrique du continu à deux dimensions, et les relations métriques fondamentales correspondantes. En supposant que les éléments de première classe et ceux de premier ordre soient les droites et les plans concourants en un point, il suffit d'observer que la propriété carac-

téristique de l'*intervalle* appartient à l'angle compris entre deux droites ou entre deux plans du système, pour en déduire : 1° la signification géométrique de l'absolu; 2° celle des coordonnées de la droite et du plan; 3° les relations connues de la Trigonométrie entre les parties d'une triade de droites ou de plans; 4° les relations métriques fondamentales de la Géométrie analytique du point. Si l'on suppose ensuite que les éléments de première classe et de premier ordre du système soient les points et les droites situés dans un plan, et si l'on observe que la propriété caractéristique de l'*intervalle* appartient au segment rectiligne compris entre deux points, et à l'angle compris entre deux droites, on aura les formules correspondantes à la Géométrie du plan.

(Le Mémoire sera continué dans les fascicules suivants du Journal.)

ZANNOTTI (M.).— *Leçons de Physique mathématique (sur la Thermodynamique)*, professées à l'Université de Naples en 1868-1869. (24 p.; it.) (Suite du tome VII de ce Journal.)

Capacités thermiques des gaz. Les équations principales appliquées aux gaz permanents. Lignes thermiques de gaz permanents. Altérations produites dans l'état d'un gaz avec réversibilité ou non-réversibilité. Application aux vapeurs, vapeur saturée et vapeur réchauffée. Tension de la vapeur saturée. Chaleur de fluidité et de vaporisation. Chaleur latente, intérieure et extérieure. Densité des vapeurs saturées. Équations principales pour les mélanges de la vapeur et du liquide générateur. Courbes thermiques de ces mélanges.

HOÜEL (J.). — *Note sur l'impossibilité de démontrer par une construction plane le principe de la théorie des parallèles, dit* Postulatum d'Euclide. (6 p.; fr.)

PADOVA (E.). — *Application de la méthode d'Hamilton au mouvement d'un point sur une surface.* (7 p.; it.)

L'auteur s'est proposé dans cette Note de déduire d'une manière facile du théorème d'Hamilton, modifié par Jacobi, pour le cas le plus simple, c'est-à-dire pour celui d'un point libre, l'équation aux dérivées partielles qui définit la fonction principale pour le mouvement d'un point sur une surface, et d'appliquer les formules ainsi obtenues à quelques cas particuliers.

Bitonti (V.-N.). — *Théorèmes de Géométrie élémentaire à démontrer.*

Del Grosso (R.). — *Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes.* (32 p.; it.) (Suite du tome VII de ce Journal.)

Chapitre V. Attraction d'une masse homogène terminée par une surface quelconque du second degré. — *Chapitre VI.* Théorèmes de Mac-Laurin, d'Ivory et de Newton. — *Chapitre VII.* Application des théorèmes précédents au calcul de l'attraction d'un ellipsoïde plein homogène. — *Chapitre VIII.* Théorème de Green. Attraction des couches de niveau. (*A continuer.*)

MÉLANGES.

GABRIEL LAMÉ.

LISTE DE SES TRAVAUX ET DES FONCTIONS QU'IL A OCCUPÉES.

Né le 22 juillet 1795, à Tours; décédé le 1er mai 1870, à Paris; successivement élève de l'École Polytechnique, 1816; de l'École des Mines à la fin de 1817; ingénieur des Mines, 1820; détaché à Saint-Pétersbourg jusqu'à la fin de 1831, avec Clapeyron. Après son retour en France, professeur de Physique à l'École Polytechnique (1832-1845); examinateur d'Analyse à la même École (1845-1864); professeur de Calcul des probabilités à la Faculté des Sciences depuis 1848; ingénieur en chef des Mines depuis 1836; membre du Bureau des Longitudes depuis 1864; membre de l'Académie des Sciences depuis le 6 mars 1843 (en remplacement de Puissant); membre correspondant des Académies de Saint-Pétersbourg, Turin, Berlin, etc., etc.

LISTE DE SES TRAVAUX.

Annales de Mathématiques de Gergonne.

Mémoire sur les intersections des lignes et des surfaces présenté à l'Académie des Sciences en décembre 1816. — Extrait inséré en février 1817.

Dans ce Mémoire se trouvent démontrés, par une analyse facile, plusieurs théorèmes nouveaux sur les intersections des lignes et des surfaces du second degré, lesquels conduisent à la solution de plusieurs problèmes de Géométrie et entre autres de celui-ci : Déterminer les éléments d'une surface du second ordre assujettie à passer par neuf points de l'espace. Ce Mémoire n'a jamais été publié *in extenso.*

Annales des Mines.

Travaux publiés par Lamé seul :

Formule pour déterminer l'inclinaison d'une couche minérale, reconnue par trois trous de sonde (1re série, t. IV, p. 81).

Sur la lampe à gaz hydrogène (1re série, t. VIII, p. 119).

Sur les ponts de chaînes en Russie et sur les résistances des fers employés dans leur construction (1re série, t. X, p. 311; — *voir* aussi *Journal du Génie Civil,* octobre 1828.

Sur une nouvelle manière de calculer les angles des cristaux (1re série, t. IV, p. 69).

Travaux publiés en collaboration avec Clapeyron :

Description d'un pont suspendu de 192 *pieds d'ouverture projeté par M. Bazaine* (1re série, t. XI, p. 265).

Mémoire sur la stabilité des voûtes (1re série, t. VII, p. 789).

Supplément à ce Mémoire (*ib.*, p. 811). Ce Mémoire a été présenté à l'Académie des Sciences en 1822.

Mémoire sur les engrenages (1re série, t. IX, p. 601).

Précis d'une course dans le pays du Hartz (1re série, t. VIII, p. 21).

Sur un cabestan mis en usage par feu M. de Bétancourt (1re série, t. XII, p. 225).

Travaux publiés en collaboration avec M. Thirria :

Description d'un fourneau de grillage pour le minerai de fer employé au Creusot et à Vienne (1re série, t. V, p. 391).

Mémoire sur la mine de fer de la Voulte (Ardèche) (1re série, t. V, p. 325).

Annales de Physique et de Chimie.

Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides en équilibre de température (t. LIII, p. 190).

Mémoire sur les lois de l'équilibre de l'éther dans les corps diaphanes (t. LV, p. 322).

Mémoire sur les vibrations lumineuses des milieux diaphanes (t. LVIII, p. 211).

Note sur les lois du refroidissement et de la solidification d'un globe liquide (en commun avec Clapeyron), présentée à l'Académie en mai 1830 (*Annales de Physique et de Chimie*, 1831).

Mémoires des Savants étrangers.

Sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes (en collaboration avec Clapeyron (t. IV, 1833).

Sur la propagation de la chaleur dans les polyèdres (t. IV, 1833).

Sur la démonstration d'un nouveau cas du dernier théorème de Fermat (t. VIII, 1843).

Sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température (t. V).

Nouvelles Annales de Mathématiques.

Discours prononcé dans la séance d'ouverture du cours de Calcul des probabilités à la Faculté des Sciences, le 23 *novembre* 1850 (t. X, p. 1-14).

Discours prononcé lors de la reprise du cours de Calcul des probabilités, à la Faculté des Sciences, le 26 *avril* 1851 (t. X, p. 214-238).

Journal de M. Liouville.

Note sur l'équilibre des températures dans les corps solides de forme cylindrique (t. I, p. 77).

Mémoire sur les surfaces isothermes dans les corps solides homogènes en équilibre de température (t. II, p. 147).

Extrait d'une lettre adressée à M. Liouville sur cette question : Un polygone convexe étant donné, de combien de manières peut-on le partager en triangles au moyen de diagonales (t. IV, p. 100).

Mémoire sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde à trois axes inégaux (t. IV, p. 126).

Second Mémoire sur l'équilibre des températures dans les corps solides homogènes de forme ellipsoïdale, concernant particulièrement les ellipsoïdes de révolution (t. IV, p. 351).

Mémoire d'analyse indéterminée, démontrant que l'équation $x^7+y^7=z^7$ *est impossible en nombres entiers* (t. V, p. 195).

Mémoire sur les coordonnées curvilignes (t. V, p. 313).

Mémoire sur les surfaces isostatiques dans les corps solides homogènes en équilibre d'élasticité (t. VI, p. 37).

Note sur la méthode de recherche des surfaces isothermes (t. VIII, p. 515).

Mémoire sur la résolution en nombres complexes de l'équation $A^n+B^n+C^n=0$ (t. XII, p. 172).

Mémoire sur les variations des coordonnées curvilignes (t. XVI, p. 171).

Mémoire sur l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques (t. XIX, p. 51).

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences.

Mémoire sur les coordonnées curvilignes (t. VI, p. 43).

Mémoire sur les surfaces isostatiques dans les corps solides en équilibre d'élasticité (t. VII, p. 778).

Mémoire sur l'équilibre des températures dans un ellipsoïde homogène et solide (t. VIII, p. 236).

Mémoire sur le dernier théorème de Fermat (t. IX, p. 45).

Mémoire sur le principe général de la Physique (t. XIV, p. 35).

Mémoire sur les surfaces isothermes et orthogonales (t. XVII, p. 338).

Rapport sur la roue hydraulique de M. Passot (t. XVII, p. 853).

Sur la méthode de recherche des surfaces isothermes (t. XVII, p. 1222).

Rapport sur un Mémoire de M. Bertrand concernant les surfaces orthogonales (t. XVII, p. 1268).

Rapport sur un Mémoire de M. Clapeyron, relatif au règlement des tiroirs

dans les machines locomotives et à l'emploi de la détente (t. XVIII, p. 275 et 345).

Rapport sur la machine hydraulique à flotteur oscillant de M. de Caligny (t. XIX, p. 704).

Note sur la limite du nombre des divisions dans la recherche du plus grand commun diviseur entre deux nombres entiers (t. XIX, p. 867).

Rapport sur un Mémoire de M. Sonnet relatif au mouvement rectiligne et uniforme des eaux, en ayant égard aux différences de vitesse des filets (t. XX, p. 786).

Rapport sur le système de chemin atmosphérique de M. Arnollet (t. XX, p. 1004 et 1010).

Mémoire sur plusieurs théorèmes d'analyse démontrés par la théorie des surfaces orthogonales (t. XXI, p. 112).

Rapport sur un Mémoire de M. Villarceau concernant l'établissement des arches de pont (t. XXIII, p. 866).

Démonstration générale du théorème de Fermat sur l'impossibilité, en nombres entiers, de l'équation $x^n + y^n = z^n$ (t. XXIV, p. 310, 569 et 888).

Note au sujet de la démonstration du théorème de Fermat (t. XXIV, p. 352.)

Dépôt d'un paquet cacheté (Séance du 22 mars 1847; t. XXIV, p. 485).

Loi mathématique de la progression de l'impôt sur les successions (t. XXVII, p. 125).

Note sur les chances du brelan, au jeu de la bouillotte (t. XXVIII, p. 705).

Note sur les épaisseurs et les courbures des appareils à vapeur (t. XXX, p. 157 et 185).

Mémoire sur les variations des coordonnées curvilignes (t. XXXII, p. 566).

Note sur la théorie de l'élasticité des corps solides (t. XXXV, p. 459).

Mémoire sur l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques (t. XXXVII, p. 145).

Rapport sur un Mémoire de M. de Saint-Venant concernant la torsion des prismes (t. XXXVII, p. 984).

Note accompagnant la présentation de son Ouvrage sur les coordonnées curvilignes (t. XLIX, p. 34).

Note accompagnant la présentation de ses Leçons sur la théorie analytique de la chaleur (t. LI, p. 1063).

Note accompagnant la présentation d'un Ouvrage de M. Gilbert intitulé : « Recherches analytiques sur la diffraction de la lumière » (t. LIV, p. 1119).

Note sur la marche à suivre pour découvrir le principe, seul véritablement universel, de la nature physique (t. LVI, p. 983).

Étude des binômes cubiques $x^3 \mp y^3$ (t. LXI, p. 921, 961).

Journal de l'École Polytechnique.

Mémoire sur la propagation de la chaleur dans les polyèdres et principalement dans le prisme triangulaire régulier (C. XXII, p. 194).

Mémoire sur les lois de l'équilibre du fluide éthéré (C. XXIII, p. 191).

BULLETIN DE FERUSSAC.

Mémoire sur la stabilité des voûtes (mai 1824).
Mémoire sur la construction des polygones funiculaires (mai 1829).
Mémoire sur l'application de la statique à la solution des problèmes relatifs à la théorie des moindres distances (mai 1829).

JOURNAL DU GÉNIE CIVIL (*).

Mémoire sur la solution graphique des problèmes du 3e et du 4e degré pour servir au tracé des épures de construction.

JOURNAL DE CRELLE.

Sur quelques formules analogues aux séries de Taylor et de Maclaurin (t. VI, p. 40).
Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes (t. VII, p. 150, 237 et 381).
(Ces deux Mémoires en collaboration avec Clapeyron.)

OUVRAGES SÉPARÉS.

Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de Géométrie (Bachelier, 1818, in-8°).
Cours lithographiés de l'École russe des Voies de communication (en particulier : Traité élémentaire de Calcul intégral, publié en collaboration avec Bazaine).
Cours de Physique de l'École Polytechnique (1re édition, 1836; 2e éd., 1840).
Leçons sur la théorie mathématique de l'Élasticité (in-8°; 1re édition, 1852; 2e édition, 1866).
Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et sur les surfaces isothermes (in-8°, 1857).
Leçons sur la théorie analytique de la Chaleur (in-8°, 1861).
Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications (in-8°, 1859).

SUR LES LIGNES ASYMPTOTIQUES DES SURFACES GAUCHES;

Par un ABONNÉ.

M. O. Bonnet a démontré, dans une Note des *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* et dans son Mémoire sur la théorie des surfaces applicables (**), que la détermination des lignes asymptotiques d'une surface gauche dépend d'une équation de Riccati. Depuis

(*) Ce Journal contient d'autres travaux de Lamé; mais tous, à part celui que nous citons, ont été publiés dans d'autres Recueils.

(**) *Journal de l'École Polytechnique,* XLIe et XLIIe Cahiers.

MM. Clebsch et Cremona ont publié des recherches (*) sur les lignes asymptotiques des surfaces gauches, et en particulier des surfaces gauches algébriques. Il résulte des travaux de ces éminents géomètres que, si une surface gauche a deux directrices rectilignes ou une directrice rectiligne et une ligne asymptotique algébrique, toutes les autres lignes asymptotiques sont algébriques. Mais peut-être n'a-t-on pas remarqué les théorèmes suivants qui nous paraissent, à cause de leur simplicité, mériter d'être énoncés.

Le rapport anharmonique des quatre points où quatre lignes asymptotiques coupent une droite quelconque de la surface est constant.

La démonstration de ce théorème s'obtient facilement par les considérations géométriques suivantes. Imaginons une surface gauche et l'hyperboloïde osculateur en tous les points d'une génératrice. La surface et l'hyperboloïde ayant les mêmes rayons de courbure, les directions des lignes asymptotiques seront les mêmes pour les deux surfaces ; en d'autres termes :

Les tangentes aux lignes asymptotiques d'une surface gauche en tous les points d'une génératrice sont les génératrices de l'hyperboloïde osculateur.

Quatre génératrices de l'un des systèmes de l'hyperboloïde allant couper les génératrices de l'autre système en quatre points dont le rapport anharmonique est constant, on obtient sans difficulté le théorème énoncé au commencement de cette Note.

On déduit d'ailleurs très-facilement de ce théorème que l'équation différentielle des lignes asymptotiques est une équation de Riccati. C'est en effet la propriété *caractéristique* de cette équation différentielle, que quatre solutions particulières donnent lieu à un rapport anharmonique constant.

En même temps, notre première proposition montre immédiatement que, si sur une surface gauche trois lignes asymptotiques sont algébriques, il en sera de même de toutes les autres (**).

(*) *Voir* Clebsch (*Journal de M. Borchardt*, t. LXVIII, p. 868); Cremona (*Annali di Matematica*, 2e série, t. Ier, p. 248).

(**) Les théorèmes cités dans ce court article n'ont pas été donnés en effet dans les travaux les plus récents des géomètres qui se sont occupés de la théorie des lignes asymptotiques; ils sont cependant *connus*, et se trouvent dans la *Théorie géométrique et mécanique des courbes à double courbure* de M. Paul Serret. Comme ils nous paraissent élégants, nous avons pensé qu'on ne nous saurait pas mauvais gré de les réimprimer ici.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Baltzer (R.). — Theorie und Anwendung der Determinanten. 3. Aufl. Gr. 8°. Leipzig, Hirzel. $1\frac{2}{3}$ Thlr.

Beobachtungen der totalen Sonnenfinsterniss am 18. August 1868, angestellt von den Vätern der Gesellschaft Jesu zu Manilla auf den Philippinen. Brief des P. *F. Fauro* an P. *A. Secchi*. Nebst einer lithographischen Tafel. Halle, H.-W. Schmidt, 1869.

Berg (Fr.-W.). — Ueber die Berechnung der Störungen. Dorpat, C. Mattiesen, 1869.

Bette (W.). — Unterhaltungen über einige Kapitel der Mécanique céleste und der Kosmogonie. Gr. 8°. Halle, Nebert. $\frac{2}{3}$ Thlr.

Bremiker (C.). — Studien über höhere Geodäsie. Berlin, Weidmann'sche Buchhandlung, 1869.

C. Bruhns. — Alexander von Humboldt. Eine wissenschaftliche Biographie. Im Verein mit *R. Avé-Lallemant, E. du Bois-Reymond, J.-V. Carus, A. Dove* u. a. herausgegeben. Leipzig, F.-A. Brockhaus. (*Sous presse.*)

Denza (Il P. Fr.).—Le aurore polari del 1869 ed i fenomeni cosmici che le accompagnarono. Torino, S. Giuseppe, 1869.

Despeyrous. — Des six opérations fondamentales des mathématiques sur la quantité composée relative à trois dimensions; applications. In-8°, 23 p. Toulouse, impr. Rouget frères et Delahaut.

Die Reise nach Indien zur Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss am 18. August 1868. Vortrag, gehalten in der Singakademie zu Berlin am 16. Januar 1867, von Prof. Dr. *G. Spörer*, Mitglied der astronomischen Expedition. Leipzig, W. Engelmann, 1869.

Eberhardt (K.-W.-H.). — Betrachtung der Niveauflächen und des hydrostatischen Druckes einer um zwei oder mehrere vertikale Achsen rotirenden Flüssigkeit. Progr. der gross. Stadtschule zu Rostock. 22 S. gr. 4°. u. 1 Taf. (Berlin, Calvary). 16 Ngr.

Ellery (Robert-S.-F.). — Astronomical Observations made at the Williamstown Observatory in the years 1861, 1862 and 1863. Melbourne, John Ferres, 1869.

Förster (W.).— Sammlung von Hülfstafeln der Berliner Sternwarte.

Herausgegeben unter Mitwirkung der Herren *Powalky*, *Tietjen*. *Romberg*, *Becker* und *Lehmann*. Berlin, 1869.

Gundelfinger (S.). — Zur Theorie des simultanen Systems einer cubischen und einer biquadratischen binären Form. Gr. 8°. (Stuttgart). Tübingen, Fues. $\frac{1}{2}$ Thlr.

Kupoustin (Pl.). — Méthode graphique simple et générale pour diviser un angle en un nombre quelconque de parties égales avec une exactitude aussi approximative qu'on puisse le désirer, fondée sur des données fournies par le calcul. Moscou, Sutthoff. 2 fr.

Lamont (J. von). — Verzeichniss von 6323 telescopischen Sternen zwischen + 3° und + 9° Declination, welche in den Münchener Zonen-Beobachtungen vorkommen, reducirt auf den Anfang des J. 1850, nebst Vergleichung mit den Beobachtungen von *Lalande*, *Bessel*, *Rümker* und *Schjellerup*. (VIII. Supplementband zu den Annalen der Münchener Sternwarte. München, 1869.)

Lefébure de Fourcy. — Traité de Géométrie descriptive, précédé d'une Introduction qui renferme la théorie du plan et de la ligne droite considérée dans l'espace. 7e édit., conforme au programme d'admission à l'École Polytechnique. 2 vol. in-8°, VIII-263 p. et 36 pl. Paris, Gauthier-Villars.

Leroy (C.-F-A.). — Traité de la Stéréotomie, comprenant les applications de la Géométrie descriptive à la théorie des ombres, la coupe des pierres et la charpente, avec un atlas composé de 74 pl. in-folio. 5e édit., revue et annotée par M. E. Martelet. In-4°, XVI-396 p. Paris, Gauthier-Villars.

Mayer (A.-M.). — The Total Eclipse of August 7th 1869. Philadelphia.

Mehler (F.-G.). — Ueber eine mit den Kugel-und Cylinderfunctionen verwandte Function und ihre Anwendung in der Theorie der Elektricitätsvertheilung. Gr. 4°. Elbing, Neumann-Hartmann. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Neumann (C.). — Formelbuch enthaltend die hauptsächlichsten Formen, Sätze und Regeln der Elementar-Mathematik zum Gebrauche an Realschulen und Gymnasien. 2. Aufl. 16°. Dresden, Türk. 12 Ngr.

Nova elementa Amphitrites planetæ, ex observationibus duodecim

oppositionum annorum 1854-1868 deducta et cum observatione Besseliana anno 1825 conciliata. Sunt additæ tabulæ motum planetæ heliocentricum usque ad annum 1900 exhibentes. Berolini, 1869.

Saint-Loup (L.). — Sur le mouvement des projectiles sphériques dans l'air. In-8°, 16 p. Strasbourg, impr. Silbermann.

Schmidt (J.-F.-Julius). — Astronomische Beobachtungen über Meteorbahnen und deren Ausgangspunkte. Athen, K. Wilberg, 1869.

Second Radcliffe Catalogue, containing 2386 Stars; deduced from Observations extending from 1854 to 1861, at the Radcliffe Observatory, Oxford, and reduced to the epoch 1860. Under the superintendance of the Rev. *Robert Main,* M. A., Radcliffe Observer. Oxford, James Parker and Co., 1870.

Settimani (C.). — D'une seconde nouvelle méthode pour déterminer la parallaxe du Soleil. In-8°, 16 p. Florence, Barbera.

Sexe (S.-A.). — Nogle Bemærkninger om de mathematiske Satser $\frac{0}{a} = 0$, $\frac{a}{0} = \infty$, og $\frac{0}{0} = x$. Aftryk af Nyt Magazin for Naturvidenskaberne. VII. Iste Hefte. Christiania, Dahl. 16 Sk.

Sylow (L.). — Bemærkninger i Anledning af Dr. A. S. Guldberg's Afhandling betitlet « Bestemmelse af den almindelige Form for en Ligning af n te Grad, hvis Rödder repræsenteres ved Formelen $\sqrt[n]{R_1} + \sqrt[n]{R_2}$, hvor n er Primtal, R_1 og R_2 ere Rödder i en Kvadratisk Ligning ». Aftryk af « Nyt Magazin for Naturvideskaberne ». VII. 1ste Hefte. Christiania, Dahl. 10 Sk.

Tables to facilitate the Reduction of Places of the Fixed Stars. Prepared for the Use of the American Ephemeris and Nautical Almanac. Washington, Bureau of Navigation, Navy Department, 1869.

Thomae (J.). — Abriss einer Theorie der complexen Functionem und der Thetafunctionen einer Veränderlichen. Gr. 8°, 152 p. Halle, Nebert. 2 Thlr.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

CREMONA (Dr Luigi). — Preliminari di una Teoria geometrica delle Superficie; 1866, Milano, Zanetti. Traduction allemande par M. Curtze; 1870, Berlin, Calvary.

Depuis que les grands géomètres Poncelet, Chasles, Steiner, Möbius, Plücker ont donné à la Géométrie pure un essor jusque-là inconnu, ces géomètres eux-mêmes et ceux qui les ont suivis sont parvenus, non-seulement à mettre dans un nouveau jour toutes les parties qu'on croyait bien connues, mais aussi à apercevoir une foule de propriétés nouvelles et importantes, à pénétrer dans des régions très-élevées, à y découvrir des vérités, à y résoudre des problèmes dont on n'aurait pas même eu l'idée de s'occuper. Mais il ne suffit pas, pour les progrès ultérieurs de la science, d'accroître le nombre et l'importance des propositions; il est encore nécessaire d'établir un lien entre ces propositions obtenues par des voies si différentes, d'en constituer un corps de doctrine propre à pénétrer dans l'enseignement, à aider les étudiants avancés et même les savants désireux de connaître et de comprendre des théories, des propositions laissées souvent sans démonstration, et dans tous les cas obtenues par les procédés les plus variés. Des Ouvrages didactiques composés avec ordre, où rien n'est laissé sans démonstration, où tout est rattaché au même principe, sont d'une utilité inappréciable pour tous les géomètres désireux de s'instruire et de faire progresser la branche à laquelle ils se sont voués. Malheureusement de tels Ouvrages sont très-difficiles à faire. Ils ne peuvent être entrepris par de simples compilateurs; il faut, pour l'unité de l'œuvre, créer de nouveaux procédés de démonstration, suppléer à des parties incomplétement traitées : il est vrai que l'auteur est récompensé par les points de vue nouveaux qui s'offrent à lui et par la découverte de nombreux et importants théorèmes.

On comprend donc bien que la tâche dont nous parlons ne peut être entreprise que par les personnes qui se sont mises au premier rang des inventeurs dans la branche qu'elles cultivent. Cette condition se trouve heureusement remplie par les deux géomètres qui ont publié des OEuvres didactiques sur la théorie des courbes et des sur-

faces algébriques : M. Salmon, qui s'est placé à un point de vue analytique; M. Cremona, qui n'utilise que les méthodes de la Géométrie pure, appelée improprement synthétique. L'Ouvrage dont nous voulons parler aujourd'hui, traduit depuis peu en allemand (comme la *Théorie des courbes* du même auteur (*), vient compléter l'œuvre de M. Cremona, et sa publication en deux langues en permettra la lecture à tous les géomètres.

M. Cremona s'est proposé pour but principal de démontrer, par la méthode synthétique, les propositions les plus essentielles de la théorie des surfaces d'ordre quelconque, propositions établies analytiquement ou seulement énoncées dans les Ouvrages et Mémoires de MM. Salmon, Cayley, Chasles, Steiner, Clebsch, etc., et d'en augmenter ou compléter quelques parties par le résultat de ses *propres recherches*. Pour les jeunes géomètres, l'auteur commence par exposer, dans l'Introduction, des parties bien connues des savants; mais nous croyons que *tous ses lecteurs* seront très-heureux de voir clairement établir les relations des propriétés déjà connues avec celles qui leur paraîtront nouvelles. L'auteur d'ailleurs avait donné la mesure de ce qu'il sait faire à ce point de vue dans la *Théorie des courbes planes*.

Après un exposé des propriétés des cônes, analogue à la théorie des courbes, M. Cremona expose la théorie des surfaces développables et celle des courbes gauches; il donne notamment les formules de M. Cayley. Arrivant à une surface quelconque, il la considère : 1° comme lieu de ses points; 2° comme enveloppe de ses plans tangents. Dans le premier cas, la figure d'une surface autour d'un point est étudiée, au moyen de l'intersection de la surface avec son plan tangent, ou avec le cône des tangentes si le point est multiple. Dans le cas où la surface est regardée comme enveloppe de ses plans tangents, l'auteur a eu besoin du théorème de M. Dupin sur les tangentes conjuguées, ce qui nécessite l'introduction d'un Chapitre sur les surfaces du second ordre. M. Cremona expose ensuite le théorie des *systèmes linéaires d'ordre m*, c'est-à-dire d'un ensemble de surfaces assujetties à des conditions communes, et telles que chacune est déterminée si l'on ajoute aux conditions déjà données celle de passer

(*) Cremona (Ludwig). — *Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven*. Greifswald, 1865. C. A. Koch's Verlagsbuchhandlung.

par *m* points. Il termine la première partie de son livre par une belle recherche des propriétés générales des surfaces gauches. On trouve dans cette partie de l'Ouvrage les théorèmes de M. Cayley sur l'égalité de l'ordre et de la classe d'une surface gauche, sur la développable bitangente et sur l'ordre de la courbe double d'une surface, ainsi que de nouvelles démonstrations stéréométriques des théorèmes sur les séries projectives de points sur les courbes, théorèmes établis d'abord par Riemann avec le secours du Calcul intégral, et démontrés depuis par M. Clebsch par les procédés de l'Analyse algébrique.

La seconde Partie commence par un exposé des plus satisfaisants de la théorie des surfaces polaires, analogue à celui que M. Cremona a déjà donné pour les courbes planes. A la théorie des surfaces polaires viennent se joindre naturellement celle des enveloppes des plans polaires et celle des lieux formés par les pôles.

Le reste de l'Ouvrage est consacré à des recherches sur les *systèmes linéaires projectifs*, c'est-à-dire dont les surfaces se correspondent une à une, et à la démonstration des propriétés formées par l'assemblage de plusieurs systèmes, appelé *complexe symétrique* par M. Cremona. Des Chapitres distincts traitent des systèmes linéaires projectifs du premier ordre (faisceaux), ou du second ordre (réseaux), ou du troisième ordre. On y trouvera le théorème fondamental de M. Chasles, et beaucoup de théorèmes nouveaux sur les lieux des points d'intersection des surfaces correspondantes, etc.; et les théorèmes ainsi obtenus sont appliqués à l'étude des lieux qu'on rencontre dans la théorie des surfaces polaires. Au nombre des autres applications, nous signalerons la démonstration des *caractéristiques* de la courbe d'intersection de deux surfaces qui se coupent déjà suivant une courbe donnée, et celle des propositions qu'a établies M. Salmon, sous une forme bien différente, dans un Mémoire sur l'ordre d'un système d'équations qui fait suite à son grand Ouvrage : *Geometry of three dimensions*.

Voilà l'indication très-rapide, nous l'avouons, des riches trésors contenus dans l'œuvre originale de M. Cremona. La traduction allemande de M. Curtze, faite avec le concours de l'auteur, contient encore un extrait comprenant les résultats, non donnés dans l'Ouvrage italien, du *Mémoire de Géométrie pure sur les surfaces du troisième ordre*, pour lequel l'Académie de Berlin attribua, en 1866, à M. Cremona, la moitié du prix Steiner, et qui est inséré au

tome LXVIII du *Journal de Crelle-Borchardt* (*). Un Chapitre de ce Mémoire qui, dans la traduction de M. Curtze, est adjoint à la seconde Partie du Livre sur les surfaces, traite des surfaces *hessienne* et *steinerienne* déduites des surfaces d'un ordre quelconque. Les autres Chapitres, formant la troisième Partie du Livre, constituent une théorie des surfaces du troisième ordre. La traduction contient aussi d'autres additions semblables, dues à l'auteur de l'Ouvrage original. Nous nous bornerons à indiquer ici l'application de la théorie des surfaces polaires à celle des surfaces développables. Dans cette addition, M. Cremona introduit d'abord de nouvelles singularités dans les formules de M. Salmon, et donne une démonstration plus complète de ces formules; mais surtout la nouvelle démonstration a l'avantage de mettre en quelque sorte sous les yeux du lecteurs la figure que prend la surface aux environs d'un point singulier. La promesse ajoutée à la fin de l'édition italienne nous fait espérer que M. Cremona appliquera un jour la notion si claire des figures de l'espace qui lui a servi dans ces recherches, à la discussion géométrique des singularités ordinaires, et peut-être aussi à celle des singularités extraordinaires les plus importantes d'une surface quelconque, discussion dont beaucoup de difficultés ont déjà été levées par l'étude des surfaces développables.

Note. — Je viens d'indiquer un avantage considérable des méthodes de la Géométrie pure : celui de présenter une image claire des figures dont on cherche les propriétés. Cet avantage et bien d'autres sont bien prouvés par les résultats obtenus en si grand nombre dans l'Ouvrage de M. Cremona. Les méthodes géométriques tiennent maintenant leur place dans la science à côté des méthodes analytiques. Néanmoins, on élève quelquefois des doutes sur la sûreté des résultats qu'elles fournissent. Il ne me paraît pas que ce doute soit bien justifié. Certes, on peut se tromper dans les raisonnements géométriques difficiles, comme on peut, en analyse, faire des fautes de calcul, et comme l'analyste peut tirer de ses résultats algébriques de fausses conclusions géométriques; mais cela n'intéresse en rien la justesse des méthodes. Seulement on doit, afin de leur donner l'exactitude qu'elles doivent avoir, en indiquer une base assurée, alors même que

(*) L'autre moitié du prix fut donnée à M. Sturm, à Bromberg, qui a publié ses recherches dans un livre séparé.

cette dernière base devrait être trouvée dans le domaine de l'analyse. On sait que le *principe de continuité* fournit des méthodes qui sont des plus fécondes en Géométrie pure. Je ne dis pas qu'il soit impossible d'établir ce principe géométriquement; mais pour cela, on aurait au moins besoin d'une définition géométrique des points d'intersection imaginaires. Sans elle, le théorème sur le nombre des points d'intersection de deux courbes est un emprunt à l'analyse qui est *permis*, bien entendu, à condition qu'on l'avoue. C'est pour cela que j'aurais désiré que M. Cremona eût admis, au commencement de son Ouvrage sur les courbes planes, le principe de continuité, en en renvoyant la démonstration à l'analyse, ou au moins qu'une remarque de cette nature précédât la définition, au nº 28, d'une courbe d'ordre m, et eût remplacé, au nº 32, la démonstration du théorème dont nous venons de parler.

Pour l'intersection d'une courbe gauche avec une surface, on peut raisonner de la manière suivante. L'analyse nous montre qu'une courbe d'ordre n, qui est l'*intersection complète* de deux surfaces, rencontre une surface d'ordre m en mn points. S'il faut ajouter à la courbe d'ordre n une courbe d'ordre n' pour avoir une intersection complète, on sait de même que ces deux courbes rencontrent une surface (m) en $m\,(n+n')$ points. Quant à la distribution de ces points sur les deux courbes, elle doit rester la même si la surface (m) varie; car au cas où des points d'intersection pourraient passer d'une courbe à l'autre, on devrait les regarder comme des branches d'une même courbe. On a ainsi justifié le procédé dont M. Cremona se sert au nº 21 de son Ouvrage sur les surfaces, sans le démontrer, celui de remplacer la surface par m plans.

H.-G. Zeuthen.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

PROCEEDINGS of the Cambridge Philosophical Society. — In-8°.

Séance du 27 mai 1867.

Miller (W.-H.). — *Sur la méthode cristallographique de Grassmann, et sur son emploi dans l'étude des propriétés géométriques générales des cristaux.* (24 p.)

MEMOIRS OF THE ROYAL ASTRONOMICAL SOCIETY (*).

T. XXXVI; 1867.

LASSELL (W.). — *Observations de planètes et de nébuleuses à Malte.* (32 p.)

— *Observations diverses faites à Malte avec l'équatorial de 4 pieds.* (19 p.)

— *Catalogue de nébuleuses nouvelles, découvertes à Malte avec l'équatorial de 4 pieds, en* 1863-1865. (23 p., 10 pl.)

NACHRICHTEN VON DER K. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN UND DER GEORG-AUGUSTS-UNIVERSITÄT. — GÖTTINGEN, Verlag der Dieterichschen Buchhandlung (**).

Année 1868.

ENNEPER (A.). — *Sur un théorème de géométrie.* (7 p.)
Sur la courbe limite de l'ombre projetée par une surface de révolution sur un plan perpendiculaire à l'axe.

ENNEPER (A.). — *Remarques sur l'intersection de deux surfaces.* (9 p.)

HELMHOLTZ (H.). — *Sur les faits qui servent de base à la géométrie* (29 p.)

NEUMANN (C.). — *Résultats d'une étude sur les principes de l'électrodynamique* (12 p.)

ENNEPER (A.). — *Recherches de géométrie analytique.*
Suite d'articles publiés dans les volumes précédents. (2 art., 43 p.)

SCHERING (E.). — *Extension du théorème fondamental de Gauss sur les surfaces à courbure continue.*

Expression des angles d'un triangle rectiligne dont les côtés ont

(*) London : published by the Society, at their apartments, Somerset House. — Il paraît annuellement un volume in-4°, en langue anglaise.

(**) *Nouvelles de la Société royale des Sciences et de l'Université de Georges-Auguste.* — Gœttingue, librairie Dieterich.

Paraît deux fois par mois, dans le format in-12. Sciences mathématiques, physiques et naturelles; Philologie, Histoire. Programmes de l'Université. — En allemand.

même longueur que ceux d'un triangle géodésique tracé sur la surface courbe.

KLINKERFUES (W.). — *Sur les applications de l'équation différentielle* $\frac{d^2y}{dt^2} = \alpha^2 \frac{d^2y}{dx^2}$ *à l'acoustique et à l'optique, en faisant varier les conditions aux limites.* (10 p.)

Année 1869.

NEUMANN. — *Sur une extension du théorème de calcul intégral sur lequel est fondée la théorie de la décomposition en fractions simples.*

NEUMANN (C.). — *Sur la décharge oscillante d'une table de Franklin.* (10 p.)

ENNEPER (A.). — *Remarques sur le mouvement d'un point sur une surface.* (7 p.)

ENNEPER (A.). — *De la surface développable formée par les plans tangents le long d'une courbe donnée sur une surface.* (10 p.)

KLEIN (F.). — *Sur la théorie des complexes de lignes du premier et et du second degré.* (1 p.)

NÖTHER (M.). — *Sur la théorie des fonctions algébriques de plusieurs variables complexes.* (6 p.)

STERN (A.). — *Sur un théorème de Gauss (relatif à la théorie des nombres).*

QUINCKE (G.). — *Des phénomènes de capillarité sur la surface commune à deux fluides.* (22 p.)

LISTING (J.-B.). — *Sur une nouvelle espèce de vision stéréoscopique.* (25 p., 3 pl.)

ENNEPER (A.). — *Sur les loxodromies des surfaces coniques.* (17 p.)

CLEBSCH (A.). — *Sur la déformation des surfaces algébriques.*

BRIOSCHI (FR.). — *Des substitutions de la forme*

$$\theta(r) \equiv \varepsilon\left(r^{n-2} + ar^{\frac{n-3}{2}}\right),$$

pour un nombre n premier de lettres. (9 p.)

BULLETIN de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg (*).

T. XIII; 1868.

Somof (J.). — *Note sur l'attraction exercée par une couche matérielle très-mince sur un point de sa surface.* (5 col.; fr.)

Nouvelle démonstration de ce théorème de Laplace, que les attractions sur un point M de l'une des surfaces de la couche, exercées, en raison inverse du carré de la distance, par tous les éléments auxquels on peut mener de M des droites qui ne rencontrent aucune des deux surfaces, ont une résultante normale à la surface en M, et égale à la densité de la couche multipliée par la circonférence d'un cercle dont le rayon est égal à l'épaisseur de cette couche.

Bouniakowsky (M.). — *Sur quelques formules qui résultent de la combinaison des résidus quadratiques et non-quadratiques des nombres premiers.* (8 col.; fr.)

L'auteur établit diverses formules exprimant des propriétés de la fonction $E(x)$, qui représente l'entier maximum contenu dans le nombre x.

Sawitsch (A.). — *Observations des planètes Saturne et Neptune en 1867 à l'Observatoire académique de Saint-Pétersbourg.* (1 col.; fr.)

Struve (O.). — *Observation spectrale d'une aurore boréale.* (2 col.; all.)

Minding (F.). — *Sur la loi de formation des dénominateurs et des numérateurs dans la réduction des fractions continues en fractions ordinaires.* (4 col.; all.)

L'auteur rattache ses recherches à celles de Gauss sur les systèmes de lentilles, ainsi qu'aux travaux antérieurs d'Euler.

Linsser (C.). — *Éphéméride pour la recherche de la Comète périodique de Winnecke* (1858, II), *à son retour en* 1869. (2 col.; all.)

(*) Il paraît chaque année un volume de 36 feuilles gr. in-4, à 2 colonnes, en 5 fascicules. Prix : pour la Russie, 3 rbl. arg.; pour l'étranger, 3 thlrs. de Prusse. — En français et en allemand.

Somof (J.). — *Note sur la solution, donnée par Abel, d'un problème de Mécanique.* (4 col.; fr.)

(Voyez *Journal de Crelle*, t. I. — *Œuvres d'Abel*, t. I, p. 27-30). — « Trouver la courbe décrite par un corps pesant, connaissant le « temps employé par le corps à descendre d'une certaine hauteur, « en fonction de cette hauteur. » — Abel a généralisé le problème, et l'a résolu au moyen des propriétés des intégrales eulériennes. En le restreignant à son énoncé primitif, M. Somof a évité l'emploi des intégrales eulériennes, et a ramené la solution à une transformation très-simple des variables dans une intégrale double.

Minding (F.). — *Sur un problème du calcul des probabilités, qui se présente dans l'observation des étoiles filantes.* (6 col.; all.)

Parmi toutes les étoiles filantes qui tombent, dans un temps donné, sur la Terre, en traversant le champ visuel d'un observateur, combien y en aura-t-il de visibles dans une lunette placée dans une direction déterminée quelconque?

T. XIV; 1869.

Lenz (R.). — *Influence de la température sur la conductibilité de certains métaux pour la chaleur.* (5 col.; all.)

Comparaison des pouvoirs conducteurs pour la chaleur et pour l'électricité. Ces deux pouvoirs varient proportionnellement.

Savitch (M.). — *Observations faites à l'Observatoire astronomique de l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg.* (2 col.; fr.)

Passage de Mercure sur le Soleil du 5 novembre 1868. — Oppositions de Neptune et de Jupiter en 1868.

Rosén (P.-G.). — *Études faites à l'aide d'un astro-photomètre de M. Zöllner.* (28 col.; all.)

Description de l'instrument. Plan et résultats des observations. Erreurs probables. Différence d'éclat pour des étoiles de grandeurs consécutives. Diagramme comparatif des résultats obtenus par Zöllner et Rosén, pour les intensités correspondantes aux couleurs.

Gyldén (H.). — *Sur une méthode pour représenter les perturbations d'une comète par des expressions rapidement convergentes.* (37 col.; all.)

Hansen, dans son Mémoire couronné par l'Académie des Sciences

de Paris, a fait faire un pas considérable à la théorie des perturbations cométaires, au moyen de son *principe de partition*, qui consiste à exprimer les perturbations de la comète dans les différentes parties de son orbite par des systèmes de variables différents. La distance de la comète à la planète perturbatrice se compose d'une partie constante (c'est-à-dire indépendante de l'*anomalie partielle* de la comète), et d'une partie variable, d'autant plus petite, par rapport à la partie constante, et développable suivant une série d'autant plus convergente, que l'intervalle auquel correspond la forme du développement est moindre. Mais cette partie *constante* est une fonction de la position de la planète perturbatrice, dont le développement est peu convergent dans le cas où les deux astres sont très-voisins, si l'on prend pour argument l'anomalie moyenne de la planète. On peut augmenter la convergence en appliquant à l'orbite de la planète le principe de partition. Mais il est souvent possible d'éviter cette application, en considérant l'anomalie moyenne de la planète comme l'amplitude elliptique d'une nouvelle variable. L'auteur applique sa méthode à l'exemple, traité par Hansen, des perturbations de la comète d'Encke par Jupiter.

Struve (O.). — *Réapparition de la Comète de Winnecke, et découverte de quelques nouvelles nébuleuses.* (4 col.; all.)

Lindelöf (L.). — *Propriétés des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée, enferment le plus grand volume.* (13 col.; fr.)

Steiner a démontré (*Journal de Crelle*, t. XXIV) que le polyèdre maximum est circonscrit à une sphère tangente à chacune des faces en son centre de gravité. Il ajoute qu'il reste encore à résoudre, concernant les résultats qu'il a obtenus, plusieurs questions importantes, parmi lesquelles se trouve celle de savoir si la propriété indiquée ci-dessus convient généralement à tous les polyèdres convexes. M. Lindelöf examine cette question, et y répond par l'affirmative.

KONGLIGA Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. — *Ny följd* (*).

T. V; 1863-1864.

Lindmann (C.-F.). — *Sur les fonctions transcendantes* $Z'(a)$ *et* Ga,

(*) *Actes de l'Académie royale des Sciences de Suède.* Nouvelle série. — Stockholm.

avec l'extension de leurs valeurs au cas des valeurs impaires de a. (18 p.)

Dillner (G.). — *Groupe de formules concernant les fonctions elliptiques de première espèce.* (19 p.)

Application du *Calcul géométrique* de l'auteur à la discussion de l'intégrale de première espèce. En désignant, d'après Argand et Cauchy, par R_p la *quantité géométrique* $Re^{p\sqrt{-1}}$, l'intégration de la formule différentielle

$$dR_p = \frac{d\rho_\varphi}{1+(\rho_\varphi)^2}$$

conduit à des relations d'où l'on déduit très-simplement la discussion géométrique du problème du pendule simple.

Holmgren (Hj.). — *Sur la transformation des intégrales multiples.* (40 p.)

§ 1. Notations. Signe de substitution de Sarrus et de Lindelöf. — §§ 2 et 3. Changement de l'ordre des intégrations dans les intégrales multiples. — § 4. Introduction de nouvelles variables dans les intégrales définies. — §§ 5 et 6. Cas simples de la formule

$$\left[\prod_{i=0}^{i=n-1}\int_{f_i}^{F_i(x_1,x_2,\ldots,x_i)} dx_{i+1}\right].F(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$
$$= \Big|_{u=f_0}^{u=F_0}\left[\prod_{i=1}^{i=n-1}\int_{f_i}^{F_i(u,x_2,x_3,\ldots,x_i)} dx_{i+1}\right]$$
$$\times\int_{F_{n-1}^{-1}(x_n,x_2,\ldots,x_{n-1})}^{u} F(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_1.$$

Lindmann (C.-F.). — *Détermination des dérivées supérieures de quelques fonctions, et de diverses intégrales définies qui en dépendent.* (29 p.)

Détermination des dérivées d'ordre quelconque des fonctions $x^n e^{\frac{a}{x}}$, $x^n e^{ax^2}$, $e^{a\sqrt{x}}$, $\dfrac{\log(a+bx)}{x^n}$, $\dfrac{\log(a+bx)}{\alpha^2+\beta^2x^2}$, $\dfrac{x\log(a+bx)}{\alpha^2+\beta^2x^2}$, $(a^2+b^2x^2)^n$, $x(a^2+b^2x^2)^n$, $\operatorname{arc\,cot}\dfrac{\beta x}{\alpha}\log(a^2+b^2x^2)$, $e^{a^2x^2+bx}$,

---

P.-A. Norstedt et Fils. Publiés chaque année par demi-volumes in-4. Les Mémoires sont paginés séparément. En langue suédoise.

$e^{a^2x^2} \frac{\cos}{\sin} \alpha x$. — Calcul de plusieurs intégrales déduites des résultats précédents et des valeurs données par les Tables de Bierens de Haan.

Holmgren (Hj.). — *Sur le Calcul différentiel à indices quelconques.* (83 p.)

L'auteur part de la définition

$$D^{\mu}_{x,x_0} f(x)$$
$$= \frac{1}{\Gamma(m-\mu)} D^m (x-x_0)^{m-\mu} \int_0^1 (1-u)^{m-\mu-1} f[x_0+(x-x_0)u]\, du,$$

x, x_0 étant, ainsi que μ, des grandeurs réelles ou complexes quelconques, et m le nombre entier positif (ou nul) immédiatement plus grand que la partie réelle de μ. Ces recherches se rattachent au Mémoire précédemment indiqué sur les intégrales multiples.

T. VI; 1865-1866.

Malmsten (C.-J.). — *Sur les intégrales définies entre des limites imaginaires.* (18 p.)

Après avoir fixé, dans son *Résumé des Leçons sur le Calcul infinitésimal* (*) (21e Leçon), la signification d'une intégrale définie entre des limites réelles, Cauchy l'a étendue, deux ans plus tard, dans son célèbre *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires.* M. Malmsten établit les théorèmes suivants, relatifs à ces dernières intégrales :

Théorème I. Si l'on a diverses quantités complexes $A_n + B_n i$, dont les parties réelles soient de même signe, et que le module de $a + bi$ soit une *moyenne* entre ceux des quantités $\alpha_n + \beta_n i$, on a

$$\Sigma(A_n + B_n i)(\alpha_n + \beta_n i) = (a+bi)\Sigma(A_n + B_n i).$$

Théorème II. $p\,dx + q\,dy$ étant une différentielle exacte,

$$\lim \Sigma [p(x_n, y_n)\,dx_n + q(x_n, y_n)\,dy_n]$$
$$= \int_{x_0}^{X} p(x, Y)\,dx + \int_{y_0}^{Y} q(x_0, y)\,dy.$$

(*) Cet Ouvrage de Cauchy, si important pour l'histoire de la Science, est maintenant *presque introuvable.* Il serait bien à souhaiter qu'on en fit une nouvelle édition.

Théorème III. $f(z)$ étant une fonction synectique de $z = x + yi$, $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz$ est une quantité indépendante du chemin parcouru.

Théorème IV. On a

$$\int_{z_1}^{z_0} f(z)\,dz = -\int_{z_0}^{z_1} f(z)\,dz.$$

Théorème V. Si $f(z)$ est une fonction synectique de z, et

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,dz,$$

$F(z)$ sera une fonction synectique, ayant pour dérivée $f(z)$.

ÖFVERSIGT af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. — *Stockholm. P.-A. Norstedt och söner* (*).

T. XXII, 1865.

Dahlander (G.-R.). — *Sur l'effet mécanique produit par la vapeur d'eau saturée pendant son expansion.* (10 p., 1 pl.)

Möller (A.). — *Éléments et éphéméride de la comète de Faye.* (11 p.)

L'auteur trouve, pour les éléments de la quatrième apparition,

1865, oct. 4,0, T. m. Berlin.

$\mu = 478'',64582$	$\varpi = 49^\circ 56' 54'',56$
$M = 342^\circ 18' 32'',41$	$\Omega = 209.41.52,91$
$\varphi = 33.53.8,57$	$i = 11.22.7,44.$

Edlund (E.). — *Détermination quantitative des phénomènes de chaleur qui se produisent dans le changement de volume des métaux, et de l'équivalent mécanique de la chaleur, indépendamment du travail intérieur du métal.* (31 p.)

Daug (H.-T.). — *Sur les cubatures approximatives.* (5 p.)

L'auteur ne s'occupe que des volumes terminés à une surface quelconque et ayant pour base un rectangle. Imaginons qu'on ait divisé

(*) *Compte rendu des travaux de l'Académie royale des Sciences.* Stockholm, P.-A. Norstedt. et fils.

Un volume par an, en 10 livraisons in-8, en langue suédoise. Prix du volume : 6 Rdr.

ce rectangle en rectangles égaux par deux systèmes de parallèles aux côtés. On n'emploiera que les ordonnées de la surface élevées aux sommets et aux centres de ces rectangles.

Soient S_1 la somme des ordonnées élevées aux sommets du rectangle qui sert de base au volume; S_2 la somme des ordonnées aux points de division situés sur le périmètre du rectangle; S_4 la somme des ordonnées aux points de division situés à l'intérieur de la base; S_8 la somme des ordonnées aux centres des rectangles partiels; 2δ, 2ε les dimensions de l'un des rectangles partiels. On a approximativement

$$V = \frac{\delta.\varepsilon}{3}(1.S_1 + 2.S_2 + 4.S_4 + 8.S_8).$$

Holmgren (K.-A.). — *Sur la théorie de la formation des ondes sonores dans les tuyaux.* (17 p.)

Björling (C.-F.-E.). — *Sur quelques propriétés des séries de Fourier et de leurs coefficients.* (6 p.)

Théorème. — La série $F(t) = \overset{n=\infty}{\underset{n=1}{S}} v_n \sin nt$ peut être différentiée, lorsque l'égalité précédente subsiste non-seulement entre les limites 0 et π, mais encore aux limites elles-mêmes. Au contraire, pour que la série $F(t) = \frac{1}{2}u_0 + \overset{n=\infty}{\underset{n=1}{S}} u_n \cos nt$ puisse être différentiée, il suffit que $F(t)$ ait une valeur finie pour $t = 0$ et $t = \pi$; en supposant toujours que $F(t)$ ne devienne infini pour aucune valeur de t comprise entre les mêmes limites.

Åstrand (J.-J.). — *Méthode simple d'approximation pour les déterminations du temps et de la longitude.* (15 p.)

Cette méthode n'exige point l'emploi des Tables de logarithmes.

T. XXIII; 1866.

Edlund (Er.). — *Démonstration expérimentale de la dilatation produite par le courant électrique dans les corps solides, indépendamment de la chaleur développée.* (27 p.)

Björling (E.-G.). — *Sur les formules d'addition pour les fonctions elliptiques.* (4 p.)

Jacobi (*Sur la rotation des corps*, Journ. de Crelle; t. XXXIX, p. 324), déduit les diverses formules d'addition de la formule

$$\cos \mathrm{am}(\alpha + \beta) = \cos \mathrm{am}\,\alpha \cos \mathrm{am}\,\beta - \sin \mathrm{am}\,\alpha \sin \mathrm{am}\,\beta\, \Delta \mathrm{am}(\alpha + \beta).$$

On peut les déduire plus simplement d'une autre manière, que l'auteur indique brièvement.

T. XXIV; 1867.

THEORELL (A.-G.). — *Quelques conséquences du théorème du Cauchy sur les différences des fonctions continues.* (4 p.)

On a les formules

$$\Delta^n f(x) = \Delta x^n f^{(n)}(x + n\theta\Delta x),$$
$$\Delta^n f(x,y) = d^n f(x + n\theta\Delta x, \quad y + n\theta\Delta y).$$

PETTERSON (C.-A.). — *Déterminations astronomiques de positions dans le district de Norrbotten, en* 1859-62. (9 p.)

DAHLANDER (G.-R.). — *Sur la détermination de l'axe central et de l'axe de rotation dans le mouvement d'un corps.* (4 p.)

Construction géométrique.

T. XXV; 1868.

DAHLANDER (G.-R.). — *Théorie géométrique de l'accélération dans le déplacement d'une figure dans son plan.* (16 p., 1 pl.)

L'auteur, partant des travaux de M. Chasles (*Comptes rendus*, t. LI et LII), étudie la relation qui existe entre trois positions d'une figure, et ses résultats contiennent, comme cas particulier, la théorie de l'accélération. Il expose ensuite plusieurs théorèmes auxquels ces recherches l'ont conduit.

BJÖRLING (C.-F.-EM.). — *Sur les conditions de réalité des racines des équations algébriques.* (10 p.)

Ces conditions sont fondées sur les relations qui existent entre les racines d'une équation et celles de sa dérivée.

NOVA ACTA REGIÆ SOCIETATIS SCIENTIARUM UPSALIENSIS. — *Upsaliæ, W. Schultz* (*).

IIIe Série, t. VI; 1866-1868.

WACKERBARTH (A-D.). — *Théorie provisoire de Léda.* (24 p.; angl.)

Les perturbations sont calculées par la méthode de Laplace.

(*) Paraît par demi-volumes in-4, tous les deux ans. Mémoires paginés séparément, en diverses langues.

Hoppe (R.). — *Sur les sommes des séries divergentes.* (12 p.; fr.).

Recherche de la fonction $\varphi(n)$, telle que lim. $\frac{\Sigma u_n}{\varphi(n)} = 1$ pour n infini.

Hoppe (R.). — *Surfaces également illuminées.* (4 p.; fr.)

La surface uniformément éclairée par des rayons partis d'un point est représentée par l'ensemble des équations

$$r = \sqrt{\frac{\sin 2\mu}{c}},$$

$$\lambda = \text{arc tang}\,(\text{tang}\,\eta \sin\vartheta) + \varphi'(\sin\eta\cos\vartheta)$$

$$\mu = \text{arc tang}\,\frac{\text{tang}\,\vartheta}{\cos\eta} + \sin\eta\cos\vartheta.\varphi'(\sin\eta\cos\vartheta) - \varphi(\sin\eta\cos\vartheta),$$

r, ϑ, λ étant le rayon vecteur, la latitude et la longitude, η et μ des variables auxiliaires, et φ une fonction arbitraire.

ARCHIV der Mathematik und Physik (*).

Bd. LI, Heft 1; 1869.

Gretschel (H.). — *Démonstration élémentaire de la formule de la durée de l'oscillation d'un pendule simple.* (6 p.; all.)

L'auteur arrive à l'expression rigoureuse en remplaçant les intégrations par des sommations de séries.

Exner (K.). — *Sur la forme des petits éléments de surface.* (3 p.; all.)

Un élément de surface est engendré par le mouvement continu d'un arc de cercle infiniment petit glissant sur un autre arc de cercle infiniment petit, de manière que leurs deux plans soient toujours perpendiculaires entre eux, et que le centre du premier reste toujours dans le plan du second.

Spieker (Th.). — *Sur un cercle remarquable, décrit autour du centre de gravité du périmètre d'un triangle rectiligne, et analogue au cercle des neuf points.* (5 p.; all.).

Most (R.). — *Sur le centre de gravité du contour des figures planes et solides les plus simples.* (5 p.; all.)

(*) Voir *Bulletin*, p. 100.

Sonderhof (A.). — *Corrections géodésiques des angles horizontaux observés sur le sphéroïde.* (26 p. ; all.)

Fasbender. — *Les angles que les côtés du triangle forment avec leurs lignes de gravité respectives.* (3 p. ; fr.)

Versluys (J.). — *Applications nouvelles des déterminants à la Géométrie* (2e art.). (23 p. ; fr.)

Discussion de l'équation générale du second degré en coordonnées tangentielles ; et de la courbe du second degré intersection d'une surface et d'un plan.

Unferdinger (Fr.). — *Sur l'expression du rayon de courbure en coordonnées polaires, et sur les courbes dont l'équation est* $r^k = a^k \sin k\theta$. (21 p. ; all.)

Grassmann (H.). — *Résolution élémentaire de l'équation générale du quatrième degré.* (3 p. ; all.)

Dostor (G.). — *Propriété de la bissectrice d'un angle dans le triangle. — Ellipse et hyperbole : relation entre les angles des deux rayons vecteurs d'un point avec l'axe focal. — Inclinaison du rayon vecteur sur l'axe de la parabole. — Propriétés du triangle rectangle. — Généralisation d'un théorème d'Euler (ou de Fermat) sur le cercle, et son extension à l'ellipse. — Propriétés du triangle sphérique rectangle.* (17 p. ; fr.)

Littrow (C. von). — *Sur l'infériorité des Anciens dans les sciences physiques.* (13 p. ; all.)

Discours prononcé à l'occasion de son installation comme recteur de l'Université de Vienne.

DILLNER (Göran), adjunkt i matematik vid Upsala Akademi. — Grunddragen af den geometriska kalkylen. (*Tidskrift för matematik och Fysik*, 1868-1870, Upsala) (*).

L'*unité*, au point de vue arithmétique, étant une quantité de *grandeur* arbitraire, on peut la faire varier, et les nombres qui représentent les diverses grandeurs concrètes varieront en même temps.

(*) *Éléments du Calcul géométrique ;* par le Dr G. Dillner, Professeur adjoint de

Le changement d'unité donne lieu aux opérations de la multiplication et de la division.

Au lieu de chercher la grandeur absolue d'une quantité, on peut avoir pour but sa détermination dans une série illimitée dans les deux sens, telle que la détermination d'un point sur une droite indéfinie. Cette question se ramène à une détermination de grandeur, si l'on prend pour inconnue la distance du point cherché à une origine fixée arbitrairement sur la droite. Mais ici la grandeur de la distance n'est qu'une quantité auxiliaire, qui ne suffirait pas pour l'expression complète du résultat, si l'on n'y ajoutait l'indication du sens dans lequel elle doit être portée à partir de l'origine.

Au lieu donc de considérer séparément les deux déterminations de grandeur et de sens, il est plus simple de les comprendre dans une même détermination, et de substituer aux opérations arithmétiques d'addition et de soustraction, qui rappelaient uniquement les idées d'augmentation et de diminution, des opérations algébriques plus générales, comprenant les premières comme cas particuliers, et désignées, pour cette raison, par les mêmes noms, savoir : l'*addition algébrique,* consistant dans le transport de l'extrémité de la distance dans un certain sens convenu, et la *soustraction algébrique*, consistant dans le transport de la même extrémité dans le sens opposé. Ces deux opérations peuvent être considérées comme correspondantes au *changement d'origine.*

En concevant maintenant la soustraction à ce point de vue *plus général*, cette opération sera *toujours possible*, et la notion des quantités négatives n'offrira plus aucune difficulté.

Si l'on considère l'unité comme étant elle-même susceptible de signe, le *changement d'unité* donnera lieu à la multiplication et à la

---

Mathématiques à l'Académie d'Upsala. (Extrait du *Journal de Mathématiques et de Physique,* années 1868-1870. Huit articles, 91 p.)

Voir *Bulletin,* p. 177 et 179.

M. Dillner avait déjà publié en 1860 un Mémoire sur le même sujet, intitulé : *Geometrisk kalkyl, eller geometriska qvantiteters räknelagar*, af G. Dillner. (Aftryckt ur *Upsala Kongl. Vetenskaps-Societets Årskrift*); Upsala, G.-A. Leffler, 1860. [*Calcul géométrique,* ou *Règles du calcul des quantités géométriques.* (Extrait de l'*Annuaire de la Société Royale des Sciences d'Upsala.*) Gr. in-8, 96 p.]. L'auteur y a étendu ses recherches à la représentation des points dans l'espace à trois dimensions.

La série d'articles dont nous analysons la première partie est une exposition détaillée de la même théorie, pour le cas de deux dimensions.

division *en grandeur et en signe*, et la règle des signes s'établira aisément *a priori*, ainsi que toutes les règles du calcul algébrique des quantités réelles, et ces règles donneront toujours des résultats admissibles, tant que le problème pourra être résolu par un point appartenant à la série *linéaire* représentée par les nombres positifs et négatifs.

La question proposée peut avoir un but encore plus général, celui de la détermination d'une quantité faisant partie d'une série double, et que l'on peut représenter par un point d'un plan. Ici, outre la distance à une origine arbitraire, il faut encore avoir, non plus une simple indication pour choisir entre deux sens opposés, mais une seconde grandeur déterminant la direction dans laquelle la distance doit être portée.

En faisant un nouveau pas dans la généralisation des notations et des opérations, on est conduit à incorporer dans un même symbole analytique toutes les données qui déterminent un point du plan, et à donner les noms d'addition et de soustraction au transport d'un point dans le plan, ou, ce qui revient au même, au *changement d'origine,* lorsque l'on conserve les directions fondamentales d'où l'on compte les angles. Le symbole binaire qui caractérise ainsi une quantité de la double série s'appelle *quantité géométrique* (Cauchy) ou *quantité complexe* (Gauss) (*).

En considérant l'*unité* comme une quantité géométrique, ayant une grandeur et une direction, le *changement d'unité* conduit de la manière la plus simple et la plus naturelle à la définition de la multiplication et de la division des quantités géométriques. De là on passe à l'élévation aux puissances, et à l'extraction des racines. Cette dernière opération, grâce à la nouvelle généralisation de sa définition, ne peut plus offrir maintenant d'impossibilité, et la dénomination d'*imaginaire* ne peut plus être prise dans son sens primitif, puisqu'elle s'applique à des quantités parfaitement réelles.

(*) La première idée de la substitution des quantités géométriques aux quantités *imaginaires* ou *impossibles* remonte à Wallis (1693), qui, partant de la proportion $+1 : \sqrt{-1} = \sqrt{-1} : -1$, en conclut que $\sqrt{-1}$ doit être représenté par une longueur portée dans une direction intermédiaire entre celles qui répondent à $+1$ et à -1. Plus d'un siècle s'écoula avant qu'Argand ne vînt reprendre cette idée féconde (1806). Depuis lors, la théorie géométrique des imaginaires a été l'objet des recherches d'un grand nombre d'auteurs, travaillant souvent à l'insu les uns des autres, et parmi lesquels nous citerons en première ligne les noms d'Hamilton et de Bellavitis.

En revenant en arrière, il est aisé de voir comment les règles du calcul des quantités *algébriques* (positives ou négatives) se déduisent comme cas particulier de celles du calcul des quantités *géométriques.*

De plus, c'est seulement en vertu de la définition généralisée des opérations qu'il est permis d'appliquer à tous les cas la plupart des théorèmes relatifs aux équations algébriques.

Après avoir fondé le calcul des quantités géométriques sur les considérations simples et ingénieuses dont nous venons d'analyser la substance, M. Dillner passe aux applications de sa théorie. Nous avons exprimé déjà, en parlant de la *Méthode des équipollences* de M. Bellavitis (*), notre conviction relativement aux avantages que présente ce procédé d'analyse géométrique sous le rapport de la simplicité et de l'uniformité des moyens. Les exemples que donne M. Dillner justifient pleinement cette manière de voir.

La méthode du Calcul géométrique conduit directement aux théorèmes connus sur les projections, exprimés sous leur forme la plus simple, aux propriétés des fonctions circulaires et à leur applition à la résolution des triangles plans. Elle donne immédiatement les formules de la transformation des coordonnées, si l'on combine le changement d'origine avec le changement d'unité en direction seulement.

Chaque point d'une courbe plane étant déterminé par une certaine quantité géométrique, la formule qu'exprimera la loi de variation de cette quantité sera l'équation de la courbe. On représentera d'abord cette loi au moyen du système de coordonnées le plus simple; puis, par la transformation des coordonnées, on rapportera l'équation à un système de coordonnées quelconque.

Par exemple, si l'on prend pour origine un point d'une droite, et que l'on désigne par ρ_σ la quantité géométrique qui détermine un point quelconque de la droite, l'équation de la droite rapportée à cette origine sera $\sigma =$ const. Si l'on transporte maintenant l'origine en un point représenté par $-k_\alpha$, la nouvelle équation du lieu sera

$$r_p = k_\alpha + \rho_\sigma.$$

Si l'on décompose r_p et k_α parallèlement à deux axes faisant entre eux

(*) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. VIII, p. 289.

un angle θ, l'équation deviendra de la forme

$$x + y_\theta = g + h_\theta + \rho_\sigma,$$

d'où l'on tire, en égalant les composantes rectangulaires des deux membres,

$$x - g + (y - h)\cos\theta = \rho\cos\sigma,$$
$$(y - h)\sin\theta = \rho\sin\sigma.$$

L'élimination de la variable ρ donne l'équation en x et y.

Si l'on supposait σ variable et ρ constant, on aurait, par l'élimination de σ, l'équation du cercle de rayon ρ.

Un cercle de rayon ρ roulant sans glisser sur l'axe des x, soit $\rho\sigma$ l'abscisse du point de contact; le centre sera exprimé par $\rho\sigma + \rho_{\frac{\pi}{2}}$, et le point décrivant de la cycloïde aura pour expression, relativement à ce centre, $\rho_{-\frac{\pi}{2}-\sigma}$. Donc l'équation de la cycloïde sera

$$r_p = \rho\sigma + \rho_{\frac{\pi}{2}} + \rho_{-\frac{\pi}{2}-\sigma},$$

d'où

$$x = \rho\,(\sigma - \sin\sigma), \quad y = \rho\,(1 - \cos\sigma).$$

Après ces indications, l'auteur revient sur l'emploi de la méthode dans la résolution des problèmes de géométrie élémentaire.

Un triangle OAB est déterminé de forme par le quotient *géométrique* $\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OB}}$. La proportion OA : OB = O'A' : O'B' exprime la similitude des triangles OAB, O'A'B'. La proportion OA : OB = OB : OC indique que OB est moyenne proportionnelle entre OA et OC et bissectrice de l'angle AOC.

La construction des identités algébriques où entrent des quantités géométriques fournit un moyen fécond pour établir analytiquement un nombre illimité de propositions de géométrie.

Ainsi l'identité

$$a^2 - (b_\gamma)^2 = (a + b_\gamma)(a - b_\gamma)$$

donne, en prenant les modules de part et d'autre,

$$\sqrt{a^4 + b^4 - 2a^2b^2\cos 2\gamma} = \text{mod.}\,(a + b_\gamma) \times \text{mod.}\,(a - b_\gamma).$$

Si OA = a est la ligne menée du sommet O d'un triangle au milieu A de la base BB' = $2b$, et que γ soit l'angle OAB, le second membre sera égal à OB $\times$ OB'. En donnant à γ diverses valeurs, on aura dif-

férents théorèmes :

$$\text{Pour } \gamma = 0, \quad a^2 - b^2 = \text{OB.OB}', \quad [\text{Eucl., II, 5}];$$

$$\text{Pour } \gamma = \frac{\pi}{2}, \quad a^2 + b^2 = \text{OB.OB}', \quad [\text{Eucl., I, 47}];$$

$$\text{Pour } \gamma = \frac{\pi}{4}, \quad a^4 + b^4 = c^4, \quad \text{où} \quad c^2 = \text{OB.OB}';$$

.........., ...

M. Dillner termine par des exemples de constructions tirées de la résolution d'équations entre des quantités géométriques.

Pour encourager l'étude de ces élégantes méthodes, qui finiront sans doute par devenir classiques, M. Dillner propose pour sujet du prix annuel que décerne la rédaction du *Tidskrift*, la composition d'un Recueil de problèmes géométriques résolus au moyen des équations du premier et du second degré et de celles qui s'y ramènent (*).

J. Hoüel.

MÉLANGES.

ACADÉMIE DES SCIENCES.

CONCOURS DE L'ANNÉE 1869.

Séance publique du Lundi 11 *Juillet* 1870,

Présidée par M. Claude BERNARD, Président pour l'année 1869.

PRIX DÉCERNÉS POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

GRAND PRIX DE MATHÉMATIQUES.

(Commissaires : MM. Bertrand, Chasles, Liouville, Bonnet, Serret rapporteur.)

Rapport sur le Concours de l'année 1869.

L'Académie avait proposé, pour sujet de grand prix de Mathématiques à décerner en 1860, la question suivante :

« *Perfectionner en quelque point essentiel la théorie du mouvement de* » *trois corps qui s'attirent mutuellement, suivant la loi de la nature,*

(*) L'auteur du meilleur Mémoire recevra le second volume du *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral* de M. Bertrand. Les Mémoires devront être envoyés à M. Dillner avant le 1er janvier 1871.

» *soit en ajoutant quelque intégrale nouvelle à celles déjà connues, soit*
» *en réduisant d'une manière quelconque les difficultés que présente la*
» *solution complète du problème.* »

Un seul Mémoire a été envoyé au Concours, il porte cette épigraphe :

« *Il y a peut-être quelque avantage à présenter la théorie de la Lune*
» *comme une application des formules générales du problème des trois*
» *corps.* »

La première Partie du Mémoire est consacrée au développement d'une analyse élégante et ingénieuse, par laquelle l'auteur ramène la solution générale du problème des trois corps à l'intégration d'un système *canonique* de huit équations différentielles du premier ordre dont on connaît une intégrale, savoir : celle des *forces vives*. L'une des variables primitivement introduites ne figurait que par sa différentielle, et elle a été éliminée, à l'instar du *nœud* de Jacobi; sa détermination ultérieure s'effectue donc par une quadrature. Enfin, comme le temps n'entre aussi que par sa différentielle dans les équations, il peut lui-même être éliminé, et il est permis de dire, avec l'auteur, que la solution du problème exige seulement l'intégration de six équations différentielles du premier ordre et deux quadratures.

Mais tel était déjà l'état de la question après le travail de Jacobi sur l'*élimination des nœuds*. Quant au perfectionnement qui consiste à former un système canonique de huit équations différentielles du premier ordre dont on connaît l'intégrale des forces vives, il a été déjà réalisé récemment, d'une manière très-différente à la vérité, dans un travail communiqué à l'Académie et inséré dans les *Comptes rendus* de ses séances.

La seconde Partie du Mémoire a pour objet l'application des formules de la première partie à la théorie de la Lune. L'auteur ne présente qu'à titre d'essai cette application, et il se borne à une première approximation; la Commission exprime le regret que cette partie importante du Mémoire n'ait pas reçu plus de développements.

Si le Mémoire envoyé au Concours ne remplit pas suffisamment les conditions du programme arrêté par l'Académie, il n'en révèle pas moins chez son auteur des qualités éminentes et un talent mathématique d'un ordre élevé. Le résultat déjà obtenu permet d'espérer que de nouveaux efforts apporteront des perfectionnements

plus notables à une théorie qui intéresse à la fois, à un haut degré, l'Analyse mathématique et l'Astronomie.

En résumé la Commission décide qu'il n'y a pas lieu de décerner le prix, et elle propose à l'Académie de remettre la question au Concours pour 1872.

L'Académie adopte les Conclusions de ce Rapport.

GRAND PRIX DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Question proposée en 1864 *pour* 1866, *puis remise au concours, après modification, pour* 1869.

(Commissaires : MM. Faye, Liouville, Laugier, Le Verrier, Delaunay rapporteur.)

Rapport sur le Concours de l'année 1869.

L'Académie avait mis au concours, pour 1869, la question suivante :

« *Discuter complétement les anciennes observations d'éclipses qui nous*
» *ont été transmises par l'histoire, en vue d'en déduire la valeur de*
» *l'accélération séculaire du moyen mouvement de la Lune, sans se*
» *préoccuper d'aucune valeur théorique de cette accélération séculaire;*
» *montrer clairement à quelles conséquences ces éclipses peuvent con-*
» *duire relativement à l'accélération dont il s'agit, soit en lui assignant*
» *forcément une valeur précise, soit au contraire en la laissant indéter-*
» *minée entre certaines limites.* »

Deux pièces sont parvenues au Secrétariat de l'Institut; aucune d'elles n'a paru mériter le prix.

La Commission, vu l'importance de la question proposée, demande à l'Académie de la mettre de nouveau au concours pour l'année 1873.

L'Académie adopte cette proposition.

PRIX D'ASTRONOMIE (FONDATION LALANDE).

(Commissaires : MM. Delaunay, Faye, Mathieu, Liouville, Laugier rapporteur.)

Rapport sur le Concours de l'année 1869.

L'existence d'un grand nombre de petites planètes entre Mars et Jupiter est sans contredit un des faits les plus remarquables dont la science soit redevable aux astronomes du XIXe siècle.

Les découvertes successives des astéroïdes exercent sur les progrès

de l'Astronomie une double influence : elles agrandissent le domaine de nos connaissances uranographiques, et elles augmentent d'année en année le nombre et l'habileté des astronomes calculateurs. Aussi l'Académie, à plusieurs reprises, a-t-elle encouragé un genre de recherches si utile; nous lui rappellerons avec plaisir les noms bien connus de MM. Hencke de Driessen, Hind, de Gasparis, Luther, Goldschmidt, Chacornac, etc., qui tous ont obtenu plusieurs fois la médaille de Lalande.

Parmi les astronomes qui, dans ces dernières années, ont enrichi la nombreuse famille des petites planètes, la Commission signale M. James Watson, directeur de l'observatoire d'Ann-Arbor (États-Unis). Cet habile astronome a découvert les neuf astéroïdes n°s 79, 93, 94, 100, 101, 103, 104, 105 et 106, dont les *huit* dernières dans le court intervalle d'une année.

En conséquence, la Commission propose à l'Académie de décerner, pour l'année 1869, le prix d'Astronomie fondé par Lalande à M. James Watson.

L'Académie adopte la proposition de la Commission.

PRIX FONDÉ PAR Mme LA MARQUISE DE LAPLACE.

Une Ordonnance royale ayant autorisé l'Académie des Sciences à accepter la donation, qui lui a été faite par Mme la Marquise de Laplace, d'une rente pour la fondation à perpétuité d'un prix consistant dans la collection complète des Ouvrages de Laplace, prix qui devra être décerné chaque année au premier élève sortant de l'École Polytechnique,

Le Président remet les cinq volumes de la *Mécanique céleste*, l'*Exposition du Système du Monde* et le *Traité des Probabilités* à M. François-Henri Voisin, né le 3 décembre 1848, à Pagny-la-Blanche-Côte (Meuse), sorti le premier en 1869 de l'École Polytechnique et entré à l'École impériale des Mines.

PRIX DAMOISEAU.

(Commissaires : MM. Laugier, Mathieu, Delaunay, Le Verrier, Faye rapporteur.)

L'Académie avait proposé, pour le prix Damoiseau, la question suivante :

« *Revoir la théorie des satellites de Jupiter; discuter les observations*

» *et en déduire les constantes qu'elle renferme, et particulièrement celle* » *qui fournit la détermination directe de la vitesse de la lumière; enfin* » *construire des Tables particulières pour chaque satellite.* »

L'Académie n'ayant reçu jusqu'à présent aucune pièce sur cette question, votre Commission a l'honneur de vous proposer de la remettre au concours et d'étendre jusqu'en 1872 la limite de rigueur. Voici les motifs de cette proposition. La question de 1869 rentre complétement dans l'esprit de la fondation Damoiseau; elle est toute d'actualité, car les Tables de Delambre, continuées par Damoiseau, dont se servent tous les calculateurs d'éphémérides, ne s'étendent que jusqu'à 1860; enfin le grand problème de la vitesse de la lumière a pris, dans ces derniers temps, une importance nouvelle, grâce à de récents travaux théoriques et pratiques du plus haut intérêt. Il est donc à désirer que la solution qu'en fournit l'observation des éclipses des satellites de Jupiter soit soumise à une révision attentive sur l'ensemble des documents qui se sont accumulés depuis les travaux de Delambre, et dont on n'a encore tiré aucun parti.

Nous prions l'Académie, vu l'importance de la question, d'élever à *cinq mille francs* la valeur du prix à décerner en 1872 au nom de notre savant et regretté confrère. La somme de cinq mille francs sera constituée au moyen des arrérages disponibles de la fondation Damoiseau. Dans le cas où ces arrérages ne suffiraient pas pour former la totalité des cinq mille francs, l'Académie la compléterait en prenant sur d'autres fonds disponibles.

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

(*Voir* aux PRIX PROPOSÉS.)

PRIX PONCELET (FONDÉ PAR Mme VEUVE PONCELET).

(Commissaires : MM. Liouville, Morin, Bertrand, Serret, Combes rapporteur.)

Rapport sur le Concours de l'année 1869.

Aux termes de l'acte de donation, le prix Poncelet est destiné à l'auteur de l'Ouvrage qui aura le plus contribué aux progrès des Sciences mathématiques pures ou appliquées, publié dans les dix années qui auront précédé le jugement de l'Académie.

La Commission propose à l'Académie de décerner ce prix, pour l'année 1869, au Dr J. ROBERT MAYER, Correspondant de l'Académie

à Heilbronn, pour l'ensemble de ses Mémoires sur la Théorie mécanique de la chaleur, dont le premier remonte à l'année 1842, et que l'auteur a réunis, en 1867, en un volume imprimé à Stuttgart sous le titre : *Die Mechanik der Wärme.*

L'Académie adopte la proposition de la Commission.

PRIX PROPOSÉS POUR LES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Prix à décerner en 1870.

GRAND PRIX DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Question proposée pour 1855, *remplacée par une autre pour* 1861, *remise à* 1863, *puis à* 1865, *et enfin à* 1867; *nouvelle question proposée pour* 1870 : *reproduction du programme de l'année précédente.*

La question mise au Concours pour 1867 n'ayant été le sujet que d'un seul Mémoire qui n'a pas été jugé digne du prix, la Commission a proposé de retirer cette question du Concours et de la remplacer par la suivante :

« *Rechercher expérimentalement les modifications qu'éprouve la lumière dans son mode de propagation et ses propriétés, par suite du mouvement de la source lumineuse et du mouvement de l'observateur.* »

L'Académie a adopté la proposition de la Commission.

Le prix consiste en une médaille d'or de la valeur de *trois mille francs.*

Les Mémoires ont dû être remis au Secrétariat de l'Institut avant le 1er juin 1870.

PRIX D'ASTRONOMIE (FONDATION LALANDE).

La médaille fondée par M. de Lalande, pour être accordée annuellement à la personne qui, en France ou ailleurs (les Membres de l'Institut exceptés), aura fait l'observation la plus intéressante, le Mémoire ou le travail le plus utile au progrès de l'Astronomie, sera décernée dans la prochaine séance publique de 1870.

Ce prix consistera en une médaille d'or de la valeur de *cinq cent quarante-deux francs.*

Le terme de ce Concours est fixé au 1er juin de chaque année.

PRIX FONDÉ PAR Mme LA MARQUISE DE LAPLACE.

Une Ordonnance royale a autorisé l'Académie des Sciences à accepter la donation, qui lui a été faite par Mme la Marquise de Laplace, d'une rente pour la fondation à perpétuité d'un prix consistant dans la collection complète des Ouvrages de Laplace.

Ce prix sera décerné, chaque année, au premier élève sortant de l'École Polytechnique.

PRIX DU LEGS DALMONT.

Par son testament, en date du 5 novembre 1863, feu M. Dalmont a mis à la charge de ses légataires universels de payer, tous les trois ans, à l'Académie des Sciences, une somme de *trois mille francs*, pour être remise à celui de MM. les Ingénieurs des Ponts et Chaussées en activité de service qui lui aura présenté, à son choix, le meilleur travail ressortissant à l'une des Sections de cette Académie.

Ce prix triennal de *trois mille francs* sera décerné pendant la période de trente années, afin d'épuiser les *trente mille francs* légués à l'Académie et d'exciter MM. les Ingénieurs à suivre l'exemple de leurs savants devanciers, Fresnel, Navier, Coriolis, Cauchy, de Prony et Girard, et comme eux obtenir le fauteuil académique.

Un Décret impérial, en date du 6 mai 1865, a autorisé l'Académie à accepter ce legs.

En conséquence, l'Académie annonce qu'elle décernera, pour la seconde fois, le prix fondé par M. Dalmont, dans sa séance publique de 1870.

PRIX PONCELET.

Par Décret en date du 22 août 1868, l'Académie a été autorisée à accepter la donation qui lui a été faite au nom du général Poncelet par Mme veuve Poncelet, pour la fondation d'un prix annuel destiné à récompenser l'Ouvrage le plus utile aux progrès des Sciences mathématiques pures ou appliquées, publié dans le cours des dix années qui auront précédé le jugement de l'Académie.

Le général Poncelet, plein d'affection pour ses Confrères et de dévouement aux progrès de la science, désirait que son nom fût associé d'une manière durable aux travaux de l'Académie et aux

encouragements par lesquels elle excite l'émulation des savants. Mme veuve Poncelet, en fondant ce prix, s'est rendue l'interprète fidèle des sentiments et des volontés de l'illustre géomètre.

Le prix consistera en une médaille d'or de la valeur de *deux mille francs.*

Les Mémoires ont dû être déposés au Secrétariat de l'Institut avant le 1er juin 1870.

Prix à décerner en 1871.

GRAND PRIX DE MATHÉMATIQUES.

(Commissaires : MM. Serret, Liouville, Chasles, Hermite Ossian Bonnet rapporteur.)

Question substituée à celle proposée pour 1867 : *reproduction du programme de l'année précédente.*

La question proposée pour 1867 était énoncée en ces termes.

« *Apporter un progrès notable dans la théorie des surfaces algébriques.* »

Un seul Mémoire avait été envoyé au Concours, et la Commission a jugé qu'il n'y avait pas lieu à décerner le prix. Sur sa proposition, l'Académie a retiré la question du Concours et l'a remplacée par la suivante :

« *Faire l'étude des équations relatives à la détermination des modules* » *singuliers, pour lesquels la formule de transformation dans la théorie* » *des fonctions elliptiques conduit à la multiplication complexe.* »

Le prix, qui consistera en une médaille d'or de *trois mille francs,* sera décerné dans la séance publique de l'année 1871. Les pièces de Concours devront être déposées au Secrétariat de l'Institut avant le 1er juin de la même année.

Prix à décerner en 1872.

GRAND PRIX DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

(Commissaires : MM. Liouville, Delaunay, Chasles, Serret, Fizeau rapporteur.)

L'Académie propose pour 1872 la question suivante :

« *Étudier l'élasticité des corps cristallisés au double point de vue* » *expérimental et théorique.* »

Le prix consistera en une médaille de la valeur de *trois mille francs*. Les Mémoires devront être parvenus au Secrétariat de l'Institut avant le 1er juin 1872.

GRAND PRIX DE MATHÉMATIQUES.

Question proposée pour 1869, *maintenue au concours pour* 1872 : *reproduction du programme précédent.*

La question proposée est la suivante :

« *Perfectionner en quelque point essentiel la théorie du mouvement* » *de trois corps qui s'attirent mutuellement, suivant la loi de la nature,* » *soit en ajoutant quelque intégrale nouvelle à celles déjà connues, soit* » *en réduisant d'une manière quelconque les difficultés que présente la* » *solution complète du problème.* »

Le prix consistera en une médaille de la valeur de *trois mille francs*. Les Mémoires devront être parvenus au Secrétariat avant le 1er juin 1872.

PRIX BORDIN.

(Commissaires : MM. Serret, Liouville, Becquerel, Combes, Delaunay rapporteur.)

Le prix sera décerné au travail, analytique ou expérimental, qui aura le plus contribué à établir la *théorie des raies du spectre*.

Le prix consistera en une médaille d'or de la valeur de *trois mille francs*.

Les Ouvrages (imprimés ou manuscrits) adressés pour le Concours devront être déposés *francs de port*, au Secrétariat de l'Institut avant le 1er juin 1872, *terme de rigueur*. Les Ouvrages écrits en langue étrangère devront être accompagnés d'une traduction en français ou en latin.

PRIX DAMOISEAU.

Question proposée en 1866 *pour* 1869, *remise de nouveau au concours pour l'année* 1872 : *reproduction du programme des deux années précédentes.*

Un Décret impérial a autorisé l'Académie des Sciences à accepter la donation qui lui a été faite par Madame la Baronne de Damoiseau, d'une somme de *vingt mille francs*, « dont le revenu est destiné à » former le montant d'un prix annuel qui recevra la dénomination » de *prix Damoiseau*.

» Ce prix, quand l'Académie le jugera utile au progrès de la » science, pourra être converti en prix triennal sur une question » proposée. »

La question proposée pour l'année 1869 était la suivante :

« *Revoir la théorie des satellites de Jupiter: discuter les observations* » *et en déduire les constantes qu'elle renferme, et particulièrement celle* » *qui fournit une détermination directe de la vitesse de la lumière;* » *enfin, construire des Tables particulières pour chaque satellite.* »

Aucune pièce sur cette question n'étant parvenue au Secrétariat, l'Académie, sur la proposition de la Commission, décide, d'une part, que la question sera maintenue au concours, et, d'autre part, que le prix qui sera décerné, s'il y a lieu, en 1872, sera porté à la valeur de *cinq mille francs*.

En conséquence, l'Académie décernera, dans la séance publique de l'année 1872, ce prix de *cinq mille francs* au travail qui répondra le mieux au programme ci-dessus.

Les Mémoires seront reçus jusqu'au 1er juin 1872, *terme de rigueur*.

Prix à décerner en 1873.

GRAND PRIX DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Question proposée en 1864 *pour* 1866, *remise au concours après modification pour* 1869 *et prorogée jusqu'en* 1873.

La question proposée est la suivante :

« *Discuter complétement les anciennes observations d'éclipses qui nous* » *ont été transmises par l'histoire, en vue d'en déduire la valeur de* » *l'accélération séculaire du moyen mouvement de la Lune, sans se* » *préoccuper d'aucune valeur théorique de cette accélération séculaire;* » *montrer clairement à quelles conséquences ces éclipses peuvent conduire* » *relativement à l'accélération dont il s'agit, soit en lui assignant forcé-* » *ment une valeur précise, soit au contraire en la laissant indéterminée* » *entre certaines limites.* »

Le prix consistera en une médaille d'or de la valeur de *trois mille francs*.

Les Mémoires devront être parvenus au Secrétariat avant le 1er juin 1873, *terme de rigueur*.

CONDITIONS COMMUNES A TOUS LES CONCOURS.

Les concurrents, pour tous les prix, sont prévenus que l'Académie ne rendra aucun des Ouvrages envoyés aux Concours; les auteurs auront la liberté d'en faire prendre des copies au Secrétariat de l'Institut.

Par une mesure générale prise en 1865, l'Académie a décidé que la clôture des Concours pour tous les prix qu'elle propose aurait lieu à la même époque de l'année, et le terme a été fixé au *premier juin.*

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ueber das Zurückbleiben der Alten in den Naturwissenschaften. Rectorsrede, gehalten von *Carl von Littrow.* — Wien, C. Gerold's Sohn, 1869.

Neumann (C.). — Ueber die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie. Antrittsvorlesung. Leipzig; Teubner. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Unferdinger (F.). — Ueber das Dirichlet'sche Paradoxon bei unendlichen Reihen. Lex-8. Wien, Gerold. 12 Ngr.

Valentiner (G.). — Determinatio orbitæ cometæ V anni 1863. Gr. in-4. Berlin, Calvary. 14 Ngr.

Valentiner (W.). — Beiträge zur kürzesten und zweckmässigsten Behandlung geographischer Ortsbestimmungen. Mit Hülfstafeln. Leipzig, W. Engelmann, 1869.

Vega (G. von.). — Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch. 53. Auflage, 14. Abdruck der neuen 40. stereotyp-Ausgabe bearbeitet von C. Bremiker. Gr. in-8. 1 $\frac{1}{4}$ Thlr.

Verbesserungen zu den Declinationen des « Verzeichnisses von 9412 Aequatoreal-Sternen zwischen + 3° und — 3° Declination. » (V. Supplementband zu den Annalen der Münchener Sternwarte.)

Weissenborn (H.). — Beiträge zur Lehre von der Transformation der Gleichungen. Programm des Realgymnasiums zu Eisenach. 34 S., gr. 8°. (Berlin, Calvary.) 16 Ngr.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

FORTI (Dott. A.), professore titolare di Matematiche al R. Liceo Galilei, e di Matematiche e Meccanica alle Scuole Tecniche comunali di Pisa, ecc. — TAVOLE DEI LOGARITMI DE' NUMERI E DELLE FUNZIONI CIRCOLARI ED IPERBOLICHE; *precedute dalla storia e teoria delle iperboliche, da applicazioni e da altre tavole di uso frequente.* — Torino, Firenze e Milano, G.-B. Paravia e Comp., 1870. 2 vol. in-16 (270-576 p.). Prix : 8 fr.

L'ouvrage que nous annonçons est une seconde édition, considérablement augmentée, du volume publié par le même auteur dans les *Annali delle Università toscane* (*). Ce volume ne contenait que la Table des logarithmes des fonctions circulaires et hyperboliques, avec cinq décimales seulement. C'était le premier essai qui eût été fait hors d'Allemagne pour propager l'usage pratique de ces combinaisons d'exponentielles réelles connues depuis plus d'un siècle (**) sous le nom général de *fonctions hyperboliques,* et que l'on a distinguées par des noms particuliers rappelant leur analogie avec les fonctions circulaires formées suivant les mêmes lois au moyen d'exponentielles imaginaires.

L'introduction de ces fonctions, ou, si l'on veut, de ces notations dans l'analyse offre l'immense avantage de conserver la même forme à des résultats qui ne diffèrent entre eux que par la réalité ou l'imaginarité de certaines quantités, et de permettre de traiter uniformément les divers cas que présente une même formule, au lieu de distinguer entre les valeurs circulaires et les valeurs logarithmiques. La similitude qui existe, à quelques changements de signes près, entre les formules relatives aux fonctions circulaires et aux fonctions hyperboliques fournit le moyen d'effectuer à l'aide de celles-ci les mêmes transformations qu'avec les premières, et d'opérer ainsi des simplifications importantes dans les calculs.

Les premiers auteurs de Tables de fonctions hyperboliques, Lam-

---

(*) T. VI, 1863. Pisa. In-4°.

(**) *Voir* le *Cours de Mathématiques* de l'abbé SAURI. Paris, 1774.

bert (*), Gudermann (**), Gronau (***) ont ramené ces Tables à celles des fonctions circulaires, en profitant de la propriété qu'ont les fonctions hyperboliques d'avoir les mêmes valeurs, mais dans un autre ordre, que les fonctions circulaires d'un certain angle τ, que Lambert a proposé d'appeler l'*angle transcendant* de l'argument hyperbolique, et qui est lié à cet argument ω par les formules

$$\tau = 2 \operatorname{arc\,tang} e^{\omega} - \frac{\pi}{4}, \quad \sin\tau = \operatorname{tangh}\omega, \quad \operatorname{séc}\tau = \cosh\omega, \quad \operatorname{tang}\tau = \sinh\omega.$$

Dès lors, il suffit, pour obtenir une Table complète des fonctions hyperboliques, d'accoler à l'argument τ d'une Table trigonométrique ordinaire la valeur correspondante de la fonction

$$\omega = \operatorname{log\,nat\,tang}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

dont τ est l'angle transcendant.

Ce mode de construction des Tables est non-seulement le plus simple à réaliser, mais encore, suivant notre conviction intime, c'est de beaucoup le plus commode pour la pratique des calculs numériques. M. Gronau, au lieu de l'argument ω lui-même, ou du logarithme *naturel* de $\operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$, a eu l'heureuse idée d'introduire le produit de ω par le module des logarithmes décimaux, c'est-à-dire le logarithme *vulgaire* de $\operatorname{tang}\left(\frac{\tau}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$; de sorte que la colonne additionnelle peut être tirée de la Table trigonométrique elle-même; et, de plus, cette disposition facilite extrêmement le calcul des fonctions hyperboliques pour de grandes valeurs de l'argument, c'est-à-dire dans le voisinage de $\tau = \frac{\pi}{2}$.

Dans la seconde édition de son ouvrage comme dans la première, M. Forti a préféré suivre une autre voie, celle que lui avait tracée son illustre maître, Mossotti; il a pris pour point de départ une définition géométrique qu'il regarde comme plus simple et plus

(*) *Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen.* Berlin, 1770. In-12.

(**) *Theorie der Potenzial- oder Cyklisch-hyperbolischen Functionen.* Berlin, 1833. In-4°.

(***) *Tafeln für sämmtliche trigonometrische Functionen der cyklischen und hyperbolischen Sektoren.* Danzig, 1863. Grand in-8°.

naturelle que celle qui correspond à la conception analytique de Lambert. Considérons une hyperbole équilatère de demi-axe transverse $= 1$ et un cercle concentrique ayant ce demi-axe pour rayon. Un rayon faisant avec l'axe un angle φ, déterminera avec le cercle et avec l'hyperbole deux secteurs dont les aires seront $\frac{1}{2}\varphi$ et $\frac{1}{2}\omega$. Au lieu de l'angle φ, on peut donc considérer l'argument des fonctions circulaires qui représentent les coordonnées du cercle comme exprimant l'aire du *double secteur circulaire*. Par analogie, on considérera les coordonnées du point où l'hyperbole est rencontrée par le même rayon vecteur comme des fonctions du *double secteur hyperbolique* ω, et l'on trouvera aisément que les valeurs de l'abscisse et de l'ordonnée sont exprimées par les formules

$$\cosh\omega = \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{2}, \quad \sinh\omega = \frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2}.$$

Les *doubles secteurs*, circulaire et hyperbolique, φ et ω sont liés par la relation

$$\operatorname{tangh}\omega = \operatorname{tang}\varphi,$$

d'où l'on tire

$$\omega = \frac{1}{2}\log\operatorname{tang}\left(\varphi + \frac{\pi}{4}\right), \quad \varphi = \operatorname{arc\,tang} e^{2\omega} - \frac{\pi}{4},$$

$$\cosh\omega = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}, \quad \sinh\omega = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

ω varie de 0 à ∞, en même temps que φ varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$. Ces relations sont, comme on le voit, moins simples que celles qui se rapportent à l'angle τ de Lambert.

Les nouvelles Tables que M. Forti a construites d'après ce système diffèrent des anciennes en ce qu'elles contiennent sept décimales au lieu de cinq, et aussi par quelques détails de disposition. Chaque ensemble de deux pages en regard comprend, à gauche, la Table trigonométrique proprement dite, disposée à la manière ordinaire; à droite, la Table des fonctions hyperboliques. Cette dernière se compose de cinq colonnes, dont les deux premières donnent, pour chaque valeur de $\varphi < 45°$, le *double secteur hyperbolique* correspondant ω et son logarithme; les deux colonnes suivantes contiennent les logarithmes du sinus hyperbolique et du cosinus hyperbolique

18.

de ω; la cinquième, enfin, renferme les valeurs de l'*angle transcendant* τ avec l'approximation nécessaire pour en calculer les fonctions trigonométriques avec cinq décimales.

Pour rendre l'interpolation toujours possible, l'auteur a dû diminuer les intervalles de l'argument φ vers les deux extrémités de la Table. Ainsi pour les valeurs de φ, de $0^\circ 0'$ à $0^\circ 12'$ et de $44^\circ 55'$ à $45^\circ 0'$, la Table procède de seconde en seconde; de 0° à 5° et de $40^\circ 0'$ à $44^\circ 55'$, de 10 en 10 secondes; dans le reste du demi-quadrant, de minute en minute. Cela n'empêche pas le calcul des fonctions sinh et cosh d'être assez pénible pour les valeurs très-grandes de ω, tout au contraire de ce qui a lieu dans le système de M. Gronau.

Malgré ces inconvénients et quelques autres que nous pourrions signaler, mais à la plupart desquels un calculateur exercé peut remédier, du moins en partie, les Tables hyperboliques de M. Forti n'en sont pas moins précieuses, comme étant les plus étendues que l'on possède jusqu'à ce jour.

Outre cette partie principale, sur laquelle nous nous sommes étendu avec plus de détails, l'ouvrage de M. Forti comprend d'autres parties dont nous allons indiquer le contenu.

Le premier volume se divise en cinq Sections, dont la première (p. 1-32) présente un historique très-complet de la théorie des fonctions hyperboliques, de leurs principales applications et de leur réduction en Tables.

La deuxième Section (p. 33-52) contient les formules théoriques dont l'auteur s'est servi pour la construction de ses Tables.

Dans la troisième Section, M. Forti expose d'abord (p. 53-74) les principes de la Gnomonique. Il donne ensuite (p. 75-194) une série d'exemples très-bien choisis de l'application des fonctions circulaires et hyperboliques à un grand nombre de questions relatives à la géographie, à l'astronomie, à la physique mathématique, ainsi qu'à l'algèbre, à la trigonométrie, à la théorie des fonctions elliptiques.

La quatrième Section renferme les Tables des logarithmes d'addition et de soustraction à cinq décimales, précédées d'une Introduction qui en explique l'usage.

Enfin, la cinquième Section se compose de diverses Tables usuelles : parallaxe du soleil, réfractions atmosphériques, sinus des multiples de l'arc de 3 degrés, poids spécifiques, nombres de vibrations pour

les divers tons, vitesse du son, chaleurs spécifiques, force élastique de la vapeur d'eau, indices de refraction.

Outre les grandes Tables de fonctions circulaires et hyperboliques dont nous avons parlé en commençant, le second volume renferme une Table des logarithmes vulgaires des 10800 premiers nombres avec sept décimales.

On voit par cette analyse combien le Recueil de M. Forti est riche en précieux renseignements, que l'on trouverait difficilement ailleurs rassemblés sous une forme plus commode. Ajoutons que l'exécution typographique est très-satisfaisante, bien qu'il soit à regretter que l'auteur n'ait pas adopté le format in-8°, qui aurait diminué l'épaisseur un peu gênante du second volume, tout en permettant d'employer un caractère moins fin et moins fatigant pour la vue.

J. Houël.

JOURNAL de l'École Polytechnique, publié par le Conseil d'instruction de cet établissement. Quarante-troisième Cahier, t. XXVI, in-4°, 1870. Paris, Gauthier-Villars. Prix : 10 francs (*).

Rolland (E.). — *Mémoire sur l'établissement des régulateurs de la vitesse, solution rigoureuse du problème de l'isochronisme par les régulateurs à boules conjuguées, sans emploi de ressorts, ni de contre-poids variables; influence du moment d'inertie sur les oscillations à longue période.*

Voici le préambule de cet important travail :

« Convaincu par une longue expérience de l'insuffisance des règles données jusqu'ici aux constructeurs pour assurer la transmission régulière du travail dans les machines, je me suis livré, sur la question si délicate de la réglementation de leur vitesse, à des études approfondies dont je me propose d'exposer successivement les résultats. Mais en attendant qu'il me soit possible de le faire avec les développements convenables, j'ai pensé devoir en extraire une partie essentielle et particulièrement intéressante pour les applications pratiques. Tel est le but du présent Mémoire.

« On admet, en général, que la sensibilité d'un régulateur est caractérisée par la quantité à laquelle on donne le nom d'*écart propor-*

(*) Le *Journal de l'École Polytechnique* paraît à intervalles indéterminés.

tionnel de la vitesse, quantité égale à une fraction dont le numérateur est la différence des vitesses extrêmes sous l'action desquelles l'appareil peut rester en équilibre, et dont le dénominateur est le double de la vitesse de règle, ou, plus exactement, la somme des vitesses extrêmes.

» En cherchant la valeur analytique de cet *écart proportionnel* pour un dispositif quelconque de la famille des régulateurs, on trouve qu'elle est la somme de deux quantités, dont la première est indépendante des résistances passives du système et dont la seconde est, au contraire, proportionnelle à leur résultante.

» Les résistances passives agissent toujours en sens inverse du mouvement; cette seconde quantité ne peut jamais être annulée : il est possible seulement de la rendre suffisamment petite. Mais il n'en est plus de même pour la première, et rien ne s'oppose à ce qu'elle soit égale à zéro, en disposant convenablement les diverses parties du mécanisme.

» Les régulateurs dans lesquels cette annulation a été réalisée sont ceux auxquels nous donnerons, avec Léon Foucault, la qualification d'*isochrones.* Ils sont doués, sous la rapport de la sensibilité, de qualités analogues à celles d'une balance dont le centre de gravité coïnciderait avec celui de rotation, et, par ce motif, leur réalisation a été le but des efforts d'un grand nombre d'inventeurs (*). »

Haton de la Goupillière (J.-N.). — *Recherches sur les centres de gravité.*

« Ce travail est consacré à l'étude du centre de gravité dans des conditions nouvelles. Il comprend deux parties distinctes. Dans la première, je me propose la détermination du centre dans des cas qui échapperaient complétement aux anciennes méthodes par la complication inabordable des intégrations. L'artifice fondamental consiste dans l'emploi des variables d'Euler pour représenter les courbes au moyen d'une équation entre la longueur de l'arc et l'angle de contingence. On arrive ainsi à traiter avec facilité un grand nombre de

(*) M. Delaunay, dans un Rapport sur ce Mémoire présenté à l'Académie, a conclu de la manière suivante, le 23 mars 1868 :

« En résumé, le Mémoire de M. Rolland renferme une excellente étude de la question des régulateurs isochrones et fait connaître plusieurs solutions nouvelles, à la fois nettes et simples, de cette intéressante question. Nous proposons à l'Académie d'ordonner l'insertion de ce Mémoire dans le *Recueil des Savants étrangers.* »

questions générales, par exemple le cas des arcs de courbe homogènes, ceux dont la densité varie en raison de la courbure et auxquels les théorèmes de Steiner, de Raabe et de Wetzig donnent beaucoup d'intérêt, les surfaces de révolution, les troncs de cylindre, etc. L'application que j'ai eue particulièrement en vue concerne les épicycloïdes, dont le centre de gravité donne lieu à plusieurs propriétés curieuses.

» La seconde partie comprend des recherches barocentriques inverses, dans lesquelles il s'agit de déterminer la figure elle-même, courbe ou surface, d'après des propriétés imposées à l'avance à son centre de gravité; non des propriétés de maximum comme celles que l'on a déjà résolues par le calcul des variations, mais des relations entre les coordonnées terminales du corps et celles de son centre de gravité. »

Maurice Levy. — *Mémoire sur les coordonnées curvilignes orthogonales et en particulier sur celles qui comprennent une famille quelconque de surfaces du second degré.*

L'auteur débute par la démonstration géométrique d'une condition nécessaire et suffisante pour qu'une famille de surfaces puisse faire partie d'un système triplement orthogonal. On sait, en effet (c'est M. Bouquet qui a le premier attiré l'attention sur ce point), qu'une famille de surfaces définie par l'équation $\alpha = \varphi(x, y, z)$ n'est pas nécessairement une des trois familles d'un système triplement orthogonal. M. Bouquet a mis ce fait en évidence en montrant que les surfaces particulières dont l'équation est

$$\alpha = X + Y + Z,$$

ne font partie d'un système orthogonal que si X, Y, Z satisfont à certaines conditions (*). M. Darboux, dans un travail inséré au tome III des *Annales de l'École Normale supérieure,* avait montré que, pour que les surfaces $\alpha = \varphi(x, y, z)$ fassent partie d'un système orthogonal, il *faut* et il *suffit* que α satisfasse à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre. Quand cette condition est remplie, les deux autres systèmes s'obtiennent par l'intégration d'une équation de la forme

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

(*) *Journal de M. Liouville,* t. XI, 1re série.

Déjà, il est vrai, en 1862, M. Bonnet avait réalisé le progrès le plus important et ramené la solution du problème à l'intégration d'une équation aux différences partielles du troisième ordre. Il avait ainsi indiqué nettement et précisé l'ordre de difficulté de la question, mais sa méthode exigeait encore l'intégration de plusieurs équations simultanées du second ordre auxquelles doit satisfaire une fonction de trois variables.

M. Levy examine successivement les familles de surfaces moulures, de surfaces de révolution, de cônes, de cylindres, etc.

Après avoir étudié tous ces systèmes particuliers, M. Levy donne le théorème suivant :

« Pour qu'une famille de surfaces puisse faire partie d'un système triplement orthogonal, il est nécessaire que la ligne des ombilics de cette famille soit une trajectoire orthogonale des surfaces qui la composent. »

M. Levy recherche ensuite les systèmes orthogonaux formés de surfaces du second degré, et il montre que, dans ce cas, le théorème précédent donne une condition non-seulement nécessaire, mais suffisante. Le travail se termine par diverses applications et une généralisation de la méthode employée.

Tissot (A.). — *Sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes.*

Ce Mémoire très-élégant a pour objet l'intégration des transcendantes de la forme $e^x \frac{f(x)}{\sqrt[n]{X}}$.

« Dans les six premiers paragraphes, on suppose que $f(x)$ et X sont des fonctions entières, et l'on donne la forme que doit affecter l'intégrale lorsqu'elle existe sous forme finie, c'est-à-dire lorsqu'il est possible de l'exprimer à l'aide des fonctions algébriques, exponentielles, logarithmiques, auxquelles il est inutile de joindre les fonctions circulaires directes ou inverses, puisque ces dernières ne sont autre chose que des logarithmes ou des exponentielles d'imaginaires. Cette forme une fois trouvée, il suffit, pour obtenir la valeur de l'intégrale et appliquer à un polynôme de degré connu la méthode des coefficients indéterminés. Le mode d'analyse dont nous avons fait usage pour traiter cette première question a été emprunté à un Mé-

moire de M. Liouville sur les intégrales dont la valeur est algébrique (*).

Dans le cinquième paragraphe, on démontre que, si l'intégrale proposée existe sous forme finie, elle s'annule quand on la prend entre deux limites respectivement égales à $-\infty$ et à l'une des racines de l'équation $X = 0$.

Dans le sixième, on considère le cas où $f(x)$ serait une fonction rationnelle non entière et celui où l'expression proposée ne contiendrait plus de radical.

Dans les trois suivants, on donne un autre procédé pour reconnaître si la valeur de l'intégrale $\int e^x \frac{f(x)dx}{\sqrt[n]{X}}$ existe sous forme finie, et pour trouver alors sa valeur. Ce procédé repose sur l'emploi de formules qui permettent de la décomposer en deux parties, dont l'une est une fonction connue de X, et dont l'autre est une intégrale qui n'existe jamais sous forme finie, de sorte que l'on a simplement à constater si la dérivée de cette dernière est ou non identiquement nulle.

Enfin, il importait de démontrer que les conditions données comme nécessaires dans le cinquième paragraphe pour l'existence de l'intégrale sous forme finie sont aussi suffisantes. C'est à quoi l'on parvient, en remarquant que les diverses transcendantes que l'on produirait en faisant varier le degré de $f(x)$ dans $\int e^x \frac{f(x)}{\sqrt[n]{X}} dx$ dépendent linéairement d'un certain nombre d'entre elles, et en formant les équations différentielles linéaires dont ces dernières permettent de trouver les solutions générales. Pour obtenir ces équations différentielles, nous n'avons eu qu'à imiter un procédé déjà employé par M. Hermite à propos des intégrales abéliennes (**).

La démonstration exige aussi que l'on établisse, entre certaines intégrales définies, une relation analogue à celle que fournit le théorème de Legendre sur les intégrales elliptiques de premiere et de seconde espèce à modules complémentaires; mais, sur ce sujet, nous pouvons renvoyer à une Note que nous avons publiée ultérieurement (***). »

(*) *Journal de l'École Polytechnique*, XXII[e] Cahier.

(**) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, 1[er] semestre 1844.

(***) *Journal de M. Liouville*, 2[e] série, t. XVII.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

ACTA Societatis scientiarum Fennicæ. — *Helsingforsiæ* (*).
T. VII, 1863.

Lindelöf (L.). — *Théorie des surfaces de révolution à courbure moyenne constante.* (28 p.; 11 pl.; fr.)

Ce Mémoire a pour objet la théorie mathématique des surfaces qui se présentent dans les belles expériences de M. Plateau sur les figures d'équilibre des masses fluides soustraites à l'action de la pesanteur. Ces surfaces jouissent de la propriété que la somme de leurs courbures principales en chaque point est constante. M. Lindelöf a étudié le cas particulier où ces surfaces sont de révolution.

Krueger (A.). — *Sur la parallaxe de l'étoile* LL 21258. (10 p.; all.)

Elle est $= 0'',260 \pm 0'',020$.

Krueger (A.). — *Sur la parallaxe de l'étoile* n° 17415,6 *d'Œltzen.* (8 p.; all.)

On trouve $0'',243 \pm 0'',0223$.

T. VIII, 1867.

Krueger (A.). — *L'amas d'étoiles h de Persée. Observations faites à l'héliomètre de Bonn, avec leur calcul.* (30 p., 11 pl.; all.)

Argelander (F.-W.-A.). — *Catalogue des aurores boréales observées aux Observatoires d'Åbo et de Helsingfors pendant les années* 1823-1837. (50 p.; all.)

Krueger (A.). — *Recherches sur l'orbite de la planète Thémis, avec une nouvelle détermination de l'attraction de Jupiter.* (38 p.; all.)

Les perturbations de Thémis sont calculées par la méthode des quadratures mécaniques. Le calcul montre que la masse de Jupiter $\frac{1}{1047,879}$, adoptée par Bessel, doit être augmentée de 0,000068 de sa valeur.

Lindelöf (L.). — *Sur les maxima et minima d'une fonction des*

(*) Publié à des époques indéterminées, par volumes in-4. En diverses langues.

rayons vecteurs menés d'un point mobile à plusieurs centres fixes. (15 p.; fr.)

Application à la somme des rayons, à la somme de leurs carrés, à leur produit.

LINDELÖF (L.). — *Remarques sur les différentes manières d'établir la formule*

$$\frac{d^2 z}{dx\, dy} = \frac{d^2 z}{dy\, dx}.$$

(7 p.; fr.)

L'auteur critique les démonstrations de ce principe données par MM. Schlömilch et Bertrand dans leurs Ouvrages sur le calcul différentiel. La démonstration de M. Schlömilch (*) suppose que, dans l'équation

$$\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} = f'_x(x+\theta h, y),$$

θ est indépendant de y, ce qui n'est pas généralement exact. Quant au principe sur lequel repose la démonstration de M. Bertrand, savoir : que, si $F(x, \alpha)$ est infiniment petit avec α, quel que soit x, il en sera de même de $D_x F(x, \alpha)$, cette proposition, qui se vérifie sur toutes les fonctions continues que l'on rencontre, nous semble être une hypothèse que l'on doit admettre au même titre que l'on admet, pour toute fonction continue d'une seule variable, l'existence d'une dérivée; c'est-à-dire que l'on exclut d'avance les fonctions discontinues ou oscillantes qui ne jouiraient pas de cette propriété. Sans cela, la démonstration de M. Lindelöf pourrait être sujette à des objections analogues à celles qu'il fait à la démonstration de M. Bertrand (**).

ZEITSCHRIFT FÜR MATHEMATIK UND PHYSIK. — Leipzig. T. XV, 1870. Ier Cahier.

KÖTTERITZSCH (TH.). — *Sur la résolution d'un système d'un nombre infini d'équations linéaires.* (15 p.)

On ramène d'abord le système à un autre dont le déterminant se réduit à son terme principal.

(*) *Compendium der höheren Analysis.* 2. Aufl., Bd. 1. S. 69.

(**) Voir le *Calcul différentiel* de M. Serret où se trouve une démonstration communiquée à l'auteur par M. O. Bonnet.

Boltzmann (L.). — *Sur l'action électrodynamique réciproque des parties d'un courant électrique de forme variable.* (17 p., 1 pl.)

Les déterminations de Weber concernant l'intensité de l'action mutuelle des éléments de courant ont été faites sur des solénoïdes, c'est-à-dire sur des courants que l'on peut considérer comme fermés. L'auteur a opéré sur des courants dont les éléments pouvaient être, d'après lui, regardés comme appartenant à un courant non fermé. Dans ses expériences, il a pris soin d'éviter les inconvénients provenant de la résistance qu'oppose la viscosité du mercure que l'on prend pour établir les communications. Comparaison des formules avec les résultats de l'expérience.

Hochheim (Ad.). — *Sur les lieux géométriques des points remarquables d'un triangle.* (8 p., 1 pl.)

Un triangle de base constante a son sommet mobile sur une section conique. Trouver les lieux géométriques de l'intersection des hauteurs, du centre du cercle inscrit, du centre de gravité, etc.

Matthiessen (L.). — *La règle de fausse position chez les Hindous et les Arabes du moyen âge, et application remarquable de cette règle à la résolution directe des équations littérales du deuxième et du troisième degré.* (7 p.)

Enneper (A.). — *Relations entre deux séries infinies.* (9 p.)

Enneper (A.). — *Remarques sur une équation différentielle du second ordre.* (8 p.)

Étude sur les équations différentielles données par Legendre, pour les intégrales elliptiques de première et de seconde espèce, différentiées par rapport au module. En appliquant à l'intégration de ces équations la méthode de la variation des constantes arbitraires, on en tire des relations remarquables entre certaines intégrales définies.

Reye (Th.). — *Propriété remarquable de l'hélice.*

Si l'on mène les plans osculateurs aux points où l'hélice est rencontrée par un plan π, tous ces plans rencontrent π en un même point P. Et si le plan π tourne autour d'une droite, le point P décrira une autre droite.

IIe Cahier. Mai 1870.

Holzmüller (G.). — *Sur l'application de la méthode de Jacobi et*

d'Hamilton au cas de l'attraction suivant la loi électrodynamique de Weber. (23 p.)

Dans ses *Leçons sur la dynamique* (*), Jacobi borne l'application de la méthode d'Hamilton aux problèmes dans lesquels le mouvement ne dépend que de la configuration des points, et non de leurs vitesses. Cette méthode peut cependant, comme Riemann l'a remarqué, s'appliquer également à beaucoup de questions dans lesquelles les vitesses entrent dans les formules.

On sait que d'après le théorème d'Hamilton, les équations finies du mouvement peuvent être mises sous la forme

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (\mathrm{T} + \mathrm{U})\, dt = 0,$$

T étant la demi-force vive du système, U la fonction des forces, dépendant seulement des coordonnées et du temps, mais non des vitesses, et la variation δ ne portant pas sur les limites de l'intégrale. Il s'agit de savoir si ce théorème est encore applicable à des cas où la fonction U contiendrait dans son expression les vitesses, et en particulier au cas du mouvement d'un point attiré suivant la loi de Weber vers un centre fixe. L'auteur démontre que cette application est possible, et il intègre l'équation aux dérivées partielles du premier ordre à laquelle se ramène la solution du problème.

Wittwer. — *Études sur la physique moléculaire* (2e suite). (25 p.). Recherches sur les propriétés de l'éther.

Heger (R.). — *Nouvelles coordonnées homogènes du plan.* (4 p.) Le plan variable qui coupe les arêtes.

$$A_0A_3, \quad A_1A_3, \quad A_2A_3,$$

du tétraèdre fondamental $AA_1A_2A_3$ dans les rapports respectifs

$$\mu_0 : \mu_3, \quad \mu_1 : \mu_3, \quad \mu_2 : \mu_3$$

peut être représenté par ces rapports, et par le symbole $(\mu_0 : \mu_1 : \mu_2 : \mu_3)$. On peut attribuer à chaque plan un système déterminé de valeurs des quantités $\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3$ elles-mêmes, et non plus seulement de leurs rapports, en assujettissant tous les groupes de quantités μ à une

(*) *Vorlesungen über Dynamik von* C.-G.-J. Jacobi, *nebst fünf hinterlassenen Abhandlungen herausgegeben von* A. Clebsch. Berlin. Reimer 1866. 1 vol. in-4°.

même équation arbitraire, que l'on supposera linéaire, pour plus de simplicité, et que l'on choisira de manière que la transformation des coordonnées rectangles en coordonnées homogènes se fasse le plus simplement possible. Les nouvelles coordonnées proposées par l'auteur sont les rapports des distances du plan aux sommets du tétraèdre et au centre de la sphère inscrite; elles sont positives pour les sommets du tétraèdre situés du même côté que le centre par rapport au plan, négatives pour les autres.

Enneper (A.). — *Réduction d'une intégrale multiple.* (3 p.)

Soit $\Sigma a^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$, et de même pour les expressions analogues, et

$$P = \int\int\cdots\int \frac{dx_1\, dx_2 \ldots dx_n}{(1 + \Sigma a^2 - 2\Sigma ax)(1 + \Sigma b^2 - 2\Sigma bx)},$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqq 1.$$

On ramène cette intégrale à la suivante :

$$P = \int_0^\pi \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \frac{\sin^n\theta_1 \sin^{n-1}\theta_2 \ldots \sin\theta_n}{MN}\, d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_n,$$

M et N étant de la forme

$$M = 1 + \Sigma a^2 - 2(a\cos\theta_1 + a'\sin\theta_1\cos\theta_2), \text{etc.}$$

Voyez, pour le cas de $n = 2$, le travail de M. Hermite (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, t. II, p. 49, 1865.)

Schlömilch (O.). — *Sur les courbes rectifiables.* (1 p.)

En choisissant les fonctions $\varphi(t)$, $\psi(t)$ de manière que l'expression $T = \int\sqrt{2\varphi'(t)\psi'(t)}\,dt$ soit intégrable, l'arc de la courbe dont les coordonnées sont

$$x - A = \varphi(t) + T, \quad y - B = \psi(t) + T$$

aura pour expression

$$s - C = \varphi(t) + \psi(t) + T.$$

Schubert (H.) — *Détermination géométrique de l'ordre de la surface fondamentale* (Kernfläche) *de Hesse* (*), *correspondante à une surface d'ordre quelconque.* (4 p.)

(*) Les géomètres paraissent s'accorder à appeler cette surface la *Hessienne*, et ce n'est que justice.

Eckardt (F.-E.) — *Théorèmes sur l'épicycloïde et l'hypocycloïde.*

Schlömilch (O.) — *Sur le paradoxe de Dirichlet dans les séries infinies.* (1 p.)

Changement de la valeur limite d'une série non absolument convergente, dont on change l'ordre des termes (*).

ARCHIV der Mathematik und Physik. Herausgegeben von J.-A. Grunert. Greifswald.

T. LI, 3e Cahier, 1869.

Grunert (J.-A.). — *Équation générale des sections coniques et en particulier du cercle, en coordonnées trilinéaires.* (19 p.; all.)

Grunert (J.-A.). — *Discussion générale de l'équation des lignes du second degré.* (50 p.; all.)

Résumé des formules relatives à ces courbes, rapportées à des coordonnées obliques.

Grunert (J.-A.). — *Discussion générale de l'équation du second degré*

$$Ap_0^2 + Bp_1^2 + Cp_2^2 + Dp_0p_1 + Ep_1p_2 + Fp_2p_0 = 0,$$

en coordonnées trilinéaires ou trimétriques. (28 p.; all.)

Unferdinger (Fr.). — *Théorie du tétraèdre donné par ses six arêtes.* (14 p.; all.)

Lagrange a donné, dans son *Mémoire sur les pyramides* (**), le volume du tétraèdre en fonction de ses six arêtes. Carnot a exprimé le même volume au moyen de deux arêtes opposées, de leur plus courte distance et de l'angle qu'elles font entre elles. Crelle y a ajouté l'expression du rayon de la sphère circonscrite. M. Unferdinger s'est proposé de compléter ces recherches par la détermination des autres éléments du tétraèdre. Il est ainsi parvenu à des résultats qui ne sont pas sans importance pour l'étude des propriétés de la pyramide triangulaire et du parallélépipède.

Nippert (P.). — *Solution de quelques problèmes.* (6 p.; all.)

(*) Relatif à une réclamation de M. Unferdinger.

(**) *OEuvres de Lagrange,* t. III, p. 661.

Ligowski. — *Sur la réduction des distances lunaires au moyen des logarithmes à quatre décimales, et sans l'emploi de tables auxiliaires.* (7 p.; all.)

Les formules employées généralement pour cette réduction ont ce défaut capital, que la détermination de quantités très-petites dépend du calcul de quantités relativement considérables, ce qui rend les opérations plus pénibles et moins sûres. Les formules de M. Ligowski, qui sont d'un emploi très-commode, peuvent donc rendre un grand service aux marins, en les dispensant de l'usage des grandes tables logarithmiques, qui leur sont si inutiles dans leurs calculs ordinaires.

Dostor (G.). — *Exercices sur le binôme de Newton.* (2 p.; fr.)

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN (*).

T. LXXV (suite), nos 1797-1800.

Hall (Asaph). — *Notes supplémentaires sur les observations de magnétisme et de position faites par l'expédition américaine en Sibérie pour l'observation de l'éclipse du 7 août 1869.* (5 col.; angl.)

Prey (A.). — *Éléments et éphéméride de la planète (43) Ariadne.*

Dembowski. — *Lettre au rédacteur.* Mesures micrométriques des étoiles doubles principales. (3 cartes, 15 col.; fr.)

Argelander (Fr.). — *Sur la dépendance entre les déclinaisons et les grandeurs des étoiles.* (7 col.; all.)

Considérations sur l'erreur personnelle.

Deike (C.). — *Eléments et éphéméride de Thisbé pour l'opposition de 1870.*

T. LXXVI, nos 1801-1824; 1870.

Spörer. — *Observations des taches solaires.* (14 col.; all.)

Distribution héliographique pendant les XIe, XIIe et XIIIe périodes de rotation de 1869. Remarques sur la position excentrique du noyau d'après Wilson.

(*) Voir *Bulletin*, p. 87.

Gould (B.-A.). — *Lettre au Rédacteur.* (4 col.; angl.)

Comparaison des positions du nouveau Catalogue de Poulkova avec celles du Catalogue de Gould, intitulé « Standard Places of Fundamental Stars ».

Schulhof (L.). — *Éléments et éphéméride de la planète* (108) *Hécube.* (6 col.; all.)

Klinkerfues (W.) — *Recherches sur le mouvement de la Terre et du Soleil dans l'éther.* (6 col.; all.)

Maywald. — *Orbite et éphéméride de* (97) *Clotho.*

Riefler (J.). — *Sur le prisme des passages.* (3 col.; all.)

Description et figure de l'instrument.

Oppolzer (Th.). — *Sur la latitude de l'Observatoire de Josefstadt.*

Dembowski. — *Observations d'étoiles doubles* (suite). (5 art., 56 col.; fr.)

Schubert (E.). — *Éléments de Thalie, leurs perturbations par Jupiter, et Table pour la solution du problème de Kepler.* (10 col.)

Winnecke (A.). — *Observations, éléments et éphéméride de la comète I,* 1870, *avec des remarques sur la position géographique de Karlsruhe.* (2 col.; all.)

Stark (J.-E.). — *Éléments de la planète* (100) *Hécate.*

Marth (A.). — *L'éclipse de Lune du* 12 *juillet* 1870. (4 col.; angl.)

Seydler (A.). — *Sur l'orbite de* (106) *Dioné.*

Veltmann (W.). — *Sur la propagation de la lumière dans les milieux en mouvement.* (14 col.; all.)

Peters (C.-A.-F.). — *Sur les observations exécutées en* 1869 *à Altona et à Berlin avec un pendule à réversion construit par Lohmeier.*

BULLETINS de l'Académie royale des Sciences de Belgique. Bruxelles, chez Hayez (*).

(*) Paraissant chaque mois par fascicules, formant annuellement deux volumes in-8°.

T. XXVII, janvier-juin 1869.

Catalan (E.). — *Sur les roulettes et les podaires.*

La somme des courbures de la roulette et de la podaire, en deux points correspondants, est égale à l'inverse de la distance comprise entre le point décrivant de la roulette et le point où la courbe roulante touche la droite fixe.

Catalan (E.). — *Sur l'addition des fonctions elliptiques de première espèce.* (6 p.)

Nouvelle interprétation géométrique de l'intégrale algébrique complète de l'équation d'addition des intégrales de première espèce.

T. XXVII, juillet-décembre 1869.

Gilbert (Ph.). — *Sur quelques propriétés des surfaces apsidales ou conjuguées.* (23 p.)

Étant donnés un point S et une surface O, l'auteur appelle *ligne d'attraction* une ligne formée par les intersections successives des sections normales à la surface, dont les plans passent par le point O. Si, dans le plan de la section, on fait tourner d'un angle droit le rayon vecteur OM de la surface S, le lieu des extrémités M′ de a nouvelle position sera une surface S′, dite surface *apsidale* (Salmon) ou *conjuguée* (Catalan).

Après avoir établi les propriétés de ces surfaces, l'auteur en fait l'application à l'ellipsoïde et à la surface des ondes.

Folie (F.). — *Note sur quelques théorèmes généraux de géométrie supérieure.* (15 p.)

Démonstration purement analytique des principaux théorèmes développés par M. Chasles dans son *Traité des sections coniques.*

FORHANDLINGER ved de Skandinaviske Naturforskeres tiende Möde i Christiania, fra den 4de til den 10de Juli 1868. — Christiania, hos Feilberg og Landmark; 1869 (*).

Steen (Ad.). — *Sur l'intégration des équations différentielles linéaires au moyen des intégrales définies.* (32 p.)

(*) *Actes du dixième Congrès des Naturalistes scandinaves*, tenu à Christiania du 4 au 10 juillet 1868. — 1 vol. gr. in-8°. Prix : 1 Spdlr. En danois et en suédois.

L'intégration des équations différentielles au moyen des intégrales définies se fait ordinairement par des méthodes indirectes ou purement empiriques, soit en sommant une série infinie qui donne le développement de l'intégrale, soit en partant d'une forme arbitraire d'intégrale définie, et déterminant les constantes et les limites de cette intégrale de manière à satisfaire à l'équation différentielle, soit en cherchant les équations différentielles auxquelles peuvent satisfaire des intégrales définies données. L'auteur de ce Mémoire a pour objet de découvrir des méthodes plus directes et plus rationnelles pour l'intégration au moyen des intégrales définies. Il étudie l'équation linéaire

$$(a_0 x + b_0) y^{(n)} + (a_1 x + b_1) y^{(n-1)} + \ldots + (a_n x + b_n) y = 0,$$

dont il traite plusieurs cas particuliers, et à laquelle il ramène, par des changements de variables, d'autres équations, telles que

$$y''' + A(ax + b) y'' + B(ax + b)^2 y' + C(ax + b)^3 y = 0,$$
$$x^{2n} y^{(n)} + p x^{2n-1} y^{(n-1)} - a^n y = 0,$$
$$x^4 y'' + (ax^3 + bx^2) y' + (cx + d) y = 0.$$

Zeuthen (H.-G.). — *Sur un nouveau système de coordonnées dans l'espace.* (16 p.)

Guldberg (A.-S.). — *Sur la formation de nouveaux algorithmes dans le calcul infinitésimal.* (12 p.)

M. W. Schell a publié, dans les *Archives de Grunert* (t. XXV, p. 1, 1855), un Mémoire intitulé : *Grundzüge einer neuen Methode der höheren Analysis*, où il expose un procédé de calcul infinitésimal dans lequel les différences infiniment petites sont remplacées par des rapports infiniment peu différents de l'unité. Cette méthode permet de traiter un grand nombre de problèmes résolus jusqu'ici par le calcul différentiel et par le calcul intégral.

M. Guldberg donne un aperçu de cette méthode et de ses applications; il établit l'identité de ses résultats avec ceux du calcul différentiel ordinaire, et il arrive à cette conclusion, sur laquelle, dit-il, on ne saurait trop insister, que ce n'est pas le calcul mécanique qui nous fournit les moyens de résoudre les problèmes, mais bien l'idée directrice sur laquelle il est fondé. Ainsi, c'est le principe infinitésimal et non la forme de l'algorithme qui décide du succès de la mé-

thode, quoique telle ou telle forme puisse être plus ou moins appropriée à certaines recherches particulières.

Petersen (J.). — *Sur les corps flottants.* (17 p.)

Ce Mémoire traite de l'équilibre des corps flottants et de sa stabilité. L'auteur discute les démonstrations données par Bouguer et par M. Duhamel, et les regarde comme insuffisantes. Ses résultats s'accordent pour la plupart avec ceux qu'a obtenus M. Dupin dans ses *Applications de Géométrie et de Mécanique.*

Bjerknes (C.-A.). — *Sur le mouvement simultané de plusieurs corps sphériques dans un fluide incompressible.* (52 p.)

Un système de sphères se meut dans un fluide parfait, incompressible et homogène, s'étendant à l'infini, sans qu'aucun autre corps, fixe ou mobile, s'y rencontre en dehors du système. Pour des distances croissantes, la pression tend d'une manière continue vers une limite constante, indépendante de la direction. D'ailleurs aucune force extérieure n'agit sur l'intérieur du fluide, bien qu'une telle force puisse agir sur les corps que le fluide contient. Le mouvement permanent du fluide est lié à un potentiel des vitesses.

A ces conditions, il faut encore ajouter celle-ci, que la pression-limite, à une distance infinie, soit assez grande pour que les mouvements puissent s'effectuer sans interrompre la continuité du fluide.

Bien que cela ne soit pas essentiel pour ce qui doit suivre, remarquons en passant que la pression-limite peut être diminuée, et même, pour des mouvements suffisamment petits, être supposée nulle, si l'on attribue au fluide des propriétés plus générales à un certain point de vue. On peut ainsi supposer le fluide doué d'une certaine cohésion qui s'oppose à la séparation des parties dans les directions normales, sans qu'il soit nécessaire d'introduire l'action d'une pression extérieure sur la masse fluide. Les choses se passeraient comme s'il existait une pression ou une succion extérieure, pourvu que, dans le cas de la succion, celle-ci ne dépassât pas une certaine valeur maximum constante. Dans un tel fluide, pourvu que les mouvements soient assez petits, on évite la formation d'espaces vides, et en même temps, à cause de l'incompressibilité, le volume ne change pas. Il n'en pourra pas moins, dans l'intérieur du fluide, se produire des changements de forme et régner la plus grande mobilité possible; les particules peuvent glisser les unes sur les autres sans résistance, de

même que deux plaques de verre, unies par une couche d'eau, si l'on fait abstraction de la grandeur du frottement, très-faible relativement à celle de l'adhésion, peuvent glisser l'une sur l'autre par l'action du moindre effort, quoiqu'elles résistent à une action normale qui tendrait à les rapprocher ou à les séparer. Un tel fluide, au point de vue mathématique, peut se traiter absolument comme le fluide incompressible et parfait que l'on considère ordinairement; mais il présente cet avantage, que la pression négative, ou succion, sera rendue possible, et, comme conséquence, que des mouvements, qui autrement ne sauraient avoir lieu sans interruption de la continuité, pourront s'effectuer, du moins en augmentant d'une manière ou d'une autre la pression.

Le problème du mouvement d'un tel système de corps se ramène au problème des pressions totales sur les diverses sphères dont il se compose, et celui-ci sera résoluble lorsque le potentiel des vitesses sera connu. Ce problème peut se résoudre exactement, quand le système se réduit à deux sphères dont les centres se meuvent suivant une même ligne fixe. L'auteur traite ensuite le problème général, où le nombre des sphères et leur mode de mouvement sont quelconques, dans l'hypothèse où les sixièmes puissances des rapports des rayons aux distances des centres sont négligeables.

L'auteur commence par traiter avec détail le cas d'une seule sphère de volume variable ou constant. Il parvient ensuite à une série de résultats approximatifs, sous la condition que les distances soient suffisamment grandes.

Sylow. — *Remarques sur le caractère de résolubilité d'une équation algébrique au moyen de radicaux, lorsqu'elle est irréductible, et que son degré est un nombre premier.* (8 p.)

Guldberg (C.-M.). — *Sur les équations de l'état des corps.* (13 p.)

L'auteur traite de l'état moléculaire des corps au point de vue de la théorie mécanique de la chaleur.

Holten. — *Sur la théorie des machines électromagnétiques.* (5 p.)

Cette Note a pour but de compléter la théorie donnée par Koosen dans les *Annales de Poggendorff*, t. LXXXVII.

GIORNALE DI MATEMATICHE. T. VII, fasc. 2. Mai-juin 1870 (*).

BATTAGLINI (G.). — *Sur les formes ternaires quadratiques* [suite et fin]. (28 p.)

Étant données deux couples de quadriques conjointes qui déterminent dans le continu deux séries d'éléments de première classe et de premier ordre, ces couples *définissent* deux séries de quadriques ayant toutes quatre éléments communs. Pour chacune de ces séries, l'auteur détermine : 1° les trois quadriques douées d'un élément double; 2° les couples des éléments conjugués harmoniques, et 3° la triade conjuguée par rapport à toutes les quadriques de la série. Ensuite l'auteur considère les séries équiharmoniques formées par les éléments harmoniques, par rapport aux quadriques de la série, des divers éléments du système, et il détermine la quadrique des *neuf éléments*, c'est-à-dire la quadrique formée par les éléments, de première classe ou de premier ordre, d'un même élément de premier ordre ou de première classe, par rapport aux diverses quadriques de la série.

Cela étant établi, des propriétés des formes binaires cubiques, appliquées à la cubique binaire qui exprime le discriminant d'une quadrique de la série, l'auteur déduit la signification des invariants du système de deux quadriques, tant des invariants fondamentaux que des autres qui en sont formés. Puis, au moyen de l'hessien et du covariant cubique du discriminant en question, il détermine les deux quadriques *équiharmoniques* et les trois quadriques *harmoniques* de la série. Enfin, après avoir indiqué d'autres significations des invariants fondamentaux du système, en les déduisant principalement de la considération des *séries multiples* de quadriques *harmoniques* par rapport à une autre quadrique, l'auteur trouve la condition pour que, étant données quatre quadriques de la série, il puisse exister une triade d'éléments *inscrite* dans l'une et *circonscrite* aux autres.

Passant ensuite à la considération des quadriques conjointes aux quadriques de la série, l'auteur parvient au contrevariant qui détermine les quatre éléments communs aux deux quadriques qui la définissent, et il établit en conséquence la signification de leur covariant ou contrevariant fondamental. Après cela, l'auteur détermine : 1° par le système de deux quadriques conjointes, les quadriques *harmoniques*

(*) Voir *Bulletin*, p. 219.

conjointes (polaires réciproques) de l'une par rapport à l'autre, et les quadriques conjointes du covariant et du contrevariant fondamental; 2° il trouve le covariant et le contrevariant fondamental du système formé par une des deux quadriques proposées combinée avec leur covariant ou contrevariant fondamental; et, étant donné un covariant ou contrevariant quadratique quelconque du système de deux quadriques, il montre 3° comment on peut trouver sa forme conjointe et l'expression générale de son discriminant.

Après avoir trouvé les expressions générales des invariants simultanés, du covariant et du contrevariant fondamental du système de deux quadriques quelconques de la série, l'auteur en fait l'application aux deux quadriques équiharmoniques de la série, et trouve ainsi le covariant ou contrevariant dit *quadrique des quatorze éléments*. Les deux quadriques équiharmoniques avec la quadrique des quatorze éléments forment un système jouissant de propriétés très-remarquables, dont les principales se trouvent dans le Mémoire indiqué.

Enfin, en entreprenant la recherche des covariants et des contrevariants du système de deux quadriques, et de degré supérieur au second, l'auteur trouve ceux qui déterminent respectivement, dans la série définie des quadriques proposées : 1° le groupe des trois quadriques douées d'un élément double; 2° le groupe des deux quadriques équiharmoniques, et 3° celui des trois quadriques harmoniques. En outre, l'auteur trouve les groupes des contrevariants fondamentaux dans les systèmes qui s'obtiennent en combinant une des deux quadriques proposées : 1° avec les trois quadriques à élément double de la série; 2° avec les deux quadriques équiharmoniques, ou 3° avec les trois quadriques harmoniques; et enfin les groupes des contrevariants fondamentaux dans les systèmes formés par les trois quadriques à élément double, ou par les trois quadriques harmoniques de la série, combinées entre elles deux à deux.

Janni (G.). — *Méthode pour calculer, par des approximations successives certaines, les racines réelles des équations algébriques.* (4 p.)

Si a et b sont deux limites entre lesquelles est comprise la racine x_0 de l'équation $f(x)=0$, et que l'on désigne par $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ la somme de tous les termes positifs et celle de tous les termes négatifs de $f'(x)$, les nouvelles limites de la racine x_0 seront, d'après l'auteur,

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{\varphi(b)-\psi(a)}, \quad b_1 = b + \frac{f(b)}{\varphi(b)-\psi(a)},$$

ou bien, suivant les circonstances,

$$a_1 = a - \frac{f(a)}{\psi(b) - \varphi(a)}, \quad b_1 = b + \frac{f(b)}{\psi(b) - \varphi(a)}.$$

Pantanelli (D.). — *Dessin axonométrique.* (1 p.)

Détermination graphique et analytique des coefficients de réduction de l'unité des axes coordonnés, au moyen des côtés du triangle trace du plan de projection sur les plans coordonnés.

Vito (E.). — *Démonstration d'un théorème de la théorie des nombres.* (4 p.)

Le théorème en question est de M. *Serret*, et exprime que, si la somme de deux carrés premiers entre eux est divisible par un nombre, ce nombre est aussi la somme de deux carrés.

Tognoli (O.). — *Sur une extension de propriétés concernant les courbes algébriques planes d'ordre quelconque, aux surfaces algébriques de degré quelconque.* (27 p.)

L'auteur s'est proposé d'étendre aux surfaces algébriques les propriétés des courbes qui ont un pôle harmonique et une droite harmonique, exposées par M. *Güssfeldt* dans les *Mathematische Annalen*. Le travail se divise en deux Parties, dont la première contient la démonstration de propriétés relatives à un groupe spécial de surfaces, et la seconde, celle de propriétés appartenant à des surfaces algébriques générales. Les articles dont se compose la première Partie sont : 1° détermination du nombre des conditions qui doivent être vérifiées pour qu'une surface admette un pôle harmonique et un plan harmonique; 2° polaires successives du pôle; 3° propriétés des lignes d'intersection de deux surfaces qui ont un pôle harmonique et un plan harmonique communs; 4° plans tangents et singularités; 5° premières polaires par rapport aux points du plan harmonique; 6° plans diamétraux et diamètres; points et droites conjugués dans le plan harmonique.

La seconde Partie, dont la suite paraîtra dans le prochain fascicule, contient jusqu'ici les articles suivants : 1° polaires internes des surfaces en général; 2° faisceaux et réseaux de polaires internes; 3° enveloppe des plans tangents des surfaces d'un réseau ou d'un faisceau dont les points de contact sont situés dans un plan donné; 4° pampolaire d'un faisceau et d'une droite de surface.

L'auteur emploie dans son travail les méthodes symboliques de calcul introduites par *Clebsch* avec tant d'avantage dans l'Analyse.

VIERTELJAHRSSCHRIFT DER ASTRONOMISCHEN GESELLSCHAFT, herausgegeben von den Schriftführern der Gesellschaft : A. AUWERS in Berlin und A. WINNECKE in Karlsruhe. — Leipzig, Verlag von W. Engelmann (*).

Ve année, Ier Cahier, janvier 1870. (Prix : 15 Ngr.)

NYRÉN (Magnus). — *Essai de détermination de la constante de la précession au moyen des étoiles de faible éclat.* — Upsala, 1869, in-8, 43 p. En suédois (**). — Analyse par M. d'Arrest.

Ce Mémoire, présenté le 22 mai 1869 à l'Université d'Upsala, pour l'obtention du grade de docteur, traite d'une question importante, qui a été indiquée à l'auteur par M. Gyldén. Il s'agit de savoir si l'observation des petites étoiles, au-dessous de la 8e grandeur, donne pour la constante de la précession une valeur identique à celle qu'on a déduite jusqu'à présent de l'observation des étoiles plus brillantes.

Pour les ascensions droites d'environ 5300 étoiles de la zone située entre + 15 degrés et — 15 degrés de déclinaison, les Catalogues de Weisse (***) et de Schjellerup (****) qui ont servi de base au travail de M. Nyrén, présentent, d'après les valeurs de la précession adoptées par ces astronomes, des différences sensibles que l'on avait déjà signalées en partie et qui n'avaient pas échappé à Schjellerup lui-même. M. Nyrén a comparé les positions d'environ 700 étoiles communes aux deux Catalogues, et de plus il a consulté l'*Armagh*

(*) *Bulletin trimestriel de la Société astronomique*, publié par les Secrétaires de la Société, MM. A. AUWERS, à Berlin, et A. WINNECKE, à Karlsruhe. Leipzig, chez Engelmann.

Paraît chaque trimestre par Cahier in-8°. En langue allemande. Prix variable.

Ce *Bulletin* se compose de deux parties, dont l'une est consacrée aux affaires de la Société, l'autre à des notices bibliographiques, dont nous donnerons un court résumé.

(**) L'auteur en a publié aussi une édition française.

(***) *Positiones mediæ stellarum in zonis Regiomontanis, etc.* Petropoli, 1846, in-4°.

(****) *Genäherte Oerter der Fixsterne, von welchen in den Astronomischen Nachrichten, Band* 1-66, *selbständige Beobachtungen angeführt sind, für die Epoche* 1855 *hergeleitet und nach den geraden Aufsteigungen geordnet* (*Publication der Astronomischen Gesellschaft*) ; 1867, in-4°. Prix : 25 Ngr.

Catalogue pour toutes les étoiles que celui-ci a de communes avec Bradley.

Il en a déduit ce résultat, que la différence Schjellerup — Weisse est constamment négative. Les valeurs moyennes de cette différence pour les Æ de 6 en 6 heures se sont trouvées égales à 1",4; 2",4; 2",5; 1",8, et la moyenne générale Schj. — W. = — 2",02. En faisant entrer dans la discussion de ces résultats les déterminations de l'équinoxe par Bessel et Wolfers, l'auteur réduit cette différence à — 1",423. C'est sur ce nombre que repose la détermination de la précession, qui serait, d'après cela, fixée à 50",188, au lieu des valeurs 50",223 (Bessel) et 50",237 (O. Struve), déduites la première de l'observation des étoiles de 5e à 6e grandeur, la seconde de celle des étoiles de 4e à 5e grandeur.

Pour confirmer ce résultat si inattendu, M. Nyrén a encore comparé le Catalogue de Schjellerup avec les observations faites à Washington (1861-62), et avec les positions données par Bradley et par Robinson pour les 184 étoiles qui leur sont communes avec Schjellerup.

Malgré les doutes qui peuvent planer sur les conclusions de l'auteur, conduisant à des modifications aussi considérables dans la valeur de la précession, le grand nombre d'étoiles qu'il a prises en considération dans ses calculs et le soin avec lequel il a discuté toutes les circonstances de ce problème délicat réclament impérieusement l'attention sérieuse des astronomes. Pour expliquer ces résultats, il faut : ou admettre une erreur constante en Æ de la part de Schjellerup, dont Argelander augmente, en effet, les nombres de $0^s,097$; ou supposer que les étoiles les plus brillantes, et vraisemblablement les plus voisines de nous, sont entraînées par un mouvement d'ensemble, auquel les plus faibles d'éclat ne participent pas. M. d'Arrest ne juge pas cette dernière explication admissible; on ne trouve, du moins, aucune trace d'un pareil mouvement dans les observations des petites étoiles faites avec exactitude depuis les époques anciennes. Peut-être y aurait-il une troisième explication possible dans l'influence qu'exercerait sur la constante de la précession un changement introduit dans la détermination admise jusqu'à présent pour l'équinoxe de 1755.

OXMANTOWN (Lord) (actuellement Lord ROSSE). — *Compte rendu*

des observations de la grande nébuleuse d'Orion. (*Philosoph. Trans. of the R. Soc. of London*, vol. CLVIII, Part II, 1868.) — Analyse, par M. O. Struve.

Ce Mémoire est accompagné de belles planches en taille-douce, représentant la nébuleuse d'Orion. Les dessins qui se rapportent à la période de 1860 à 1864 ont été exécutés par M. Hunter, aide de lord Rosse à cette époque, au moyen d'observations faites tour à tour avec le télescope de 3 pieds et avec celui de 6 pieds de l'Observatoire de Parsonstown. Il est difficile de se prononcer sur l'exactitude de ces dessins, quand on n'a pas eu à sa disposition un instrument d'une puissance d'illumination comparable à celle des réflecteurs de lord Rosse, auxquels, suivant M. O. Struve, le grand réfracteur de Poulkova lui-même est de beaucoup inférieur sous ce rapport. Cependant M. Struve inclinerait à croire, avec sir John Herschel, que les contours des dessins sont trop nettement arrêtés.

Dans le texte explicatif qui accompagne les planches, l'auteur donne, dans le premier Chapitre, un Catalogue de 92 étoiles situées dans la Nébuleuse. Mais, en comparant ce Catalogue à celui de G.-P. Bond, publié postérieurement au travail de lord Rosse (*Annals of the Harvard College Observatory*, vol. V), il est facile de voir que les indications de l'astronome de Parsonstown n'ont pas de bien hautes prétentions à la rigueur, les résultats ayant été presque tous obtenus par des estimations à simple vue. Les déterminations d'éclat des diverses étoiles sont données aussi avec une grande latitude d'approximation.

Le second Chapitre traite des limites jusqu'où l'on peut constater la présence de la matière nébuleuse. Le troisième Chapitre insiste sur la dépendance étroite existant entre les étoiles et les nébulosités qui les entourent, et que ces étoiles semblent absorber graduellement. L'auteur donne, dans le Chapitre IV, des indications intéressantes sur les changements de forme et d'éclat de certaines parties de la Nébuleuse.

Il est question, dans le Chapitre suivant, de la résolubilité de la Nébuleuse, et il ne semble pas que l'on ait été très-loin dans cette voie. Enfin les deux derniers Chapitres rendent compte des observations spectroscopiques faites avec le réflecteur de 3 pieds, et qui n'ajoutent aucun fait nouveau aux travaux de Huggins et de Secchi. Lord Rosse se propose de reprendre ses recherches avec le télescope

de 6 pieds, auquel il doit adapter un mouvement d'horlogerie. On a lieu d'attendre des résultats importants d'observations faites à l'aide d'un instrument d'un aussi grand pouvoir éclairant.

Rosén. — *Recherches et mesures exécutées avec un astrophotomètre de Zöllner.* (*Bulletin de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg*, 1869). — Analyse, par M. Engelmann.

Le but de ce Mémoire est la détermination, au moyen d'un certain nombre d'étoiles peu brillantes, du coefficient photométrique qui exprime les rapports d'éclat des étoiles de deux grandeurs consécutives. Les observations ont été faites à Poulkova, au moyen de l'astrophotomètre de Zöllner, adapté à une lunette de Steinheil, de 126 millimètres d'ouverture, de 1507 millimètres de foyer, et d'un grossissement de 52 fois. Les détails de la construction de l'instrument se trouvent dans les écrits de l'inventeur (*). Le principe fondamental du procédé consiste dans la production d'étoiles artificielles, à peu près semblables d'aspect aux étoiles naturelles, et dans l'emploi de milieux polarisés et d'une plaque de quartz pour faire varier l'éclat et la couleur des étoiles artificielles. Celles-ci se voient par réflexion dans le plan focal de la lunette, sur le même arrière-plan que l'image de l'étoile naturelle, à une distance et dans une direction que l'on peut faire varier à volonté. En imprimant une rotation aux deux prismes de Nicol et à la plaque de quartz, on peut rendre les étoiles artificielles identiques en éclat et en couleur avec les étoiles naturelles, et les angles de rotation, qui se lisent sur deux cercles divisés, indiquent l'un l'intensité, l'autre la couleur. Les éclats relatifs de deux étoiles, mesurés par cette méthode, sont entre eux comme les carrés des sinus des angles observés.

M. Rosén a trouvé que l'éclat d'une étoile peut être représenté par la formule

$$L = \alpha - \beta m,$$

L étant le logarithme de l'intensité lumineuse de l'étoile donnée, m son ordre de grandeur, α et β des constantes, dont la première représente le logarithme de l'intensité lumineuse d'une étoile de grandeur zéro, et l'autre le logarithme du rapport d'éclat de deux étoiles de grandeurs consécutives. En calculant les résultats des appréciations

(*) *Grundzüge einer allgemeinen Photometrie der Himmels*; Berlin, 1861. — *Photometrische Untersuchungen*; Leipzig, 1865.

de divers observateurs et des siennes propres, M. Rosén trouve pour β des valeurs comprises entre 0,363 et 0,456.

Gibbs (W.). — *Sur la construction d'une carte normale du Spectre solaire.* (*Silliman's Journal*, vol. XLIII, nº 127, p. 1-10).

En 1864, M. W. Huggins a publié à Londres un Mémoire étendu sur les raies spectrales des divers éléments. Il a étudié environ 1000 raies, et déterminé leurs positions, d'après une échelle arbitraire. M. Gibbs s'est proposé de réduire ces mesures en longueurs d'ondulations, dans le dessein de chercher s'il n'existerait pas quelque loi qui règlât la distribution des raies caractéristiques de chaque élément.

Pour cela, il a commencé par identifier 45 raies de l'échelle de Huggins avec celles dont les longueurs d'ondulation ont été déjà déterminées par Ångström et par Ditscheiner. Il les a partagées en neuf groupes, pour chacun desquels il a construit une formule d'interpolation, par la méthode de Cauchy, qu'il recommande comme la plus commode et la plus expéditive. Trois de ces neuf groupes ont pu être représentés par des formules du second degré ; pour les six autres, les formules se sont élevées au troisième degré. Par ce moyen, M. Gibbs a pu déterminer les longueurs d'ondulation correspondantes à toutes les raies, et en construire des Tables, qu'il a ensuite comparées avec les résultats obtenus par divers physiciens.

Ångström (A.-J.). — *Recherches sur le spectre solaire.* (Upsala et Berlin, 1869.) — (En français.)

Ces recherches se rattachent au même but que celles de M. Gibbs. L'auteur a construit une échelle des raies du spectre, où il indique non plus, comme on le faisait auparavant, les indices de réfraction, mais les longueurs d'ondulation. L'importance de cette nouvelle disposition, à laquelle il a donné le nom de *spectre normal*, est facile à reconnaître ; il suffit de remarquer que les indices de réfraction dépendent de la nature du prisme employé, et varient par conséquent avec cet instrument. Le nombre des raies pour lesquelles il a ainsi déterminé les longueurs d'ondulation s'élève à près de 1000, et ces longueurs sont indiquées en dix-millionièmes de millimètre, avec une décimale en plus.

A l'étude du *spectre normal du Soleil* M. Ångström a joint celle des spectres de l'aurore boréale et de la lumière zodiacale. Il a observé, pendant l'hiver de 1867-68, le spectre de l'arc lumineux qui

limite le segment obscur de l'aurore boréale. La lumière s'est trouvée presque complétement homogène et composée d'une seule raie brillante, voisine du groupe du calcium et correspondante à une longueur d'onde égale à 5567. Outre cette raie, on aperçoit de très-faibles traces de trois autres bandes lumineuses, qui s'étendent jusqu'à la raie F de l'hydrogène, mais qui ne se montrent que par intervalles, au moment où l'arc lumineux éprouve des ondulations qui changent sa forme. On peut donc regarder la lumière de l'aurore boréale comme réellement monochromatique. Un fait remarquable, c'est que la raie brillante du spectre de l'aurore boréale ne coïncide avec aucune des raies observées jusqu'à présent dans les spectres des gaz, mais qu'elle est identique avec le spectre de la lumière zodiacale, que l'auteur a observée en mars 1867 dans des circonstances d'éclat exceptionnelles à des latitudes aussi élevées que celle d'Upsala. On trouve même des traces de cette raie dans la faible lumière émise par le ciel pendant les belles nuits étoilées.

Maclear (Sir Thomas). — *Vérification et extension de l'arc de méridien de Lacaille au cap de Bonne-Espérance.* Publié par ordre des lords commissaires de l'Amirauté. 1866, t. I; 600 p., 24 pl.; t. II, 440 pages. — (En anglais.)

Nous n'essayerons pas de donner une analyse de cet Ouvrage, d'une si haute importance pour la Géodesie, et auquel M. Winnecke a consacré un compte rendu de 46 pages. Nous dirons seulement quelques mots sur le but de ce travail de douze années, exécuté avec le soin et l'habileté que l'on pouvait attendre de son savant auteur.

M. Maclear, lorsqu'il entreprit ses opérations, en 1836, s'était d'abord proposé pour objet de vérifier les mesures de Lacaille (1751-52). Ces mesures semblaient entraîner cette conclusion, contraire à la théorie, que la courbure de l'hémisphère austral était moindre que celle de l'hémisphère boréal; et la confiance que devaient inspirer les méthodes et l'exactitude habituelle de Lacaille ne permettaient pas de rejeter ses résultats sans preuve.

Déjà, en 1820, le capitaine Everest, ayant examiné les stations extrêmes de Lacaille, était d'avis que l'action des montagnes voisines de ces stations sur la direction du fil à plomb suffisait pour expliquer les anomalies en question.

Pendant le cours de ses travaux, M. Maclear se décida à ne pas s'en tenir à une simple vérification et à prolonger l'arc mesuré. Il a

fait usage, entre autres instruments, du célèbre secteur zénithal de Bradley, mis à sa disposition par l'Observatoire de Greenwich, et dont l'Ouvrage actuel contient une description minutieuse, due à M. Airy.

L'ensemble des opérations comprend un arc d'environ $4\frac{1}{2}$ degrés. Les résultats obtenus confirment l'opinion d'Everest sur les déviations de la verticale produite, dans les observations de Lacaille, par les attractions locales.

TIDSKRIFT FÖR MATEMATIK OCH FYSIK (*).

IIIe année, Cahiers II-VI; mars-décembre 1870.

HULTMANN (F.-W.). — *Histoire de l'Arithmétique en Suède.* (47 p.)

Suite d'articles insérés dans les tomes précédents. Le présent article est consacré à la biographie et aux travaux de Georg Stjernhjelm (**) (1598-1672), mathématicien, antiquaire, juriste, et qui est regardé comme le législateur de la poésie suédoise.

C'est lui qui a introduit le premier en Suède l'usage des fractions décimales, découvertes quarante ans auparavant par Simon Stevin. Il appliqua la division décimale aux diverses unités de mesures suédoises, dont il détermina exactement les valeurs et les rapports numériques, tels qu'ils ont été conservés jusqu'à l'époque actuelle.

On lui doit encore des traités d'algèbre et de trigonométrie, composés d'après les idées de Stévin et de Viète, et où il a fait usage pour la première fois, en Suède, des signes + et —. Quoiqu'il ait dû connaître personnellement Descartes à la cour de la reine Christine, il ne semble pas cependant avoir étudié les méthodes de ce géomètre.

Les nombreux ouvrages de Stjernhjelm, à l'exception de deux traités sur les poids et mesures, sont restés manuscrits, et sont conservés dans les bibliothèques de Stockholm et d'Upsala.

DILLNER (G.). — *Élements du Calcul géométrique.* (10 p.)

Suite d'articles précédents (***). Résolution des équations de degré supérieur.

(*) Voir *Bulletin*, p. 177.

(**) Avant d'être anobli par le roi Gustave-Adolphe (1631), il se nommait *Göran Lilje*.

(***) Voir *Bulletin*, p. 249.

Almquist (P.-W.). — *Démonstration des séries pour* sin x *et* cos x.

Falk (M.). — *Sur les lignes de courbure des surfaces développables.* (4 p.)

Björling senior (E.-G.). — *Sur les polyèdres réguliers.* (19 p.)

Exposition élémentaire et complète de la théorie des cinq corps réguliers.

Dillner (G.). — *Éléments du calcul géométrique* (suite). (17 p.)

Calcul des indices de Cauchy. Application à la théorie des équations. Nombre des racines dans un contour donné.

Boije. — *Trouver le volume d'un solide de révolution, lorsque la courbe génératrice est rapportée à des coordonnées polaires.* (3 p.)

Falk (M.). — *Caractère de convergence d'une fraction continue à termes alternativement positifs et négatifs.* (5 p.)

Wackerbarth (A.-F.-D.). — *Sur la Grande Pyramide de Gizeh.* (20 p.)

Cet article, où sont exposés les résultats des dernières mesures de la Grande Pyramide prises par le Corps topographique anglais sous la direction du colonel sir Henry James, contient une critique très-spirituelle des théories de M. Piazzi Smyth, qui avait pris cette pyramide pour une collection d'étalons de poids et mesures, et de constantes géométriques et astronomiques.

Hultman (F.-W.). — *Histoire de l'arithmétique en Suède* (suite). *Peder Månsson* (*Petrus Magni*). (9 p.)

Hultman (F.-W.). — *Théorie des puissances.* (7 p.)

Exposants fractionnaires, etc.

Dillner (G.). — *Intégrales définies des fonctions synectiques.* (21 p.)

Exposition des théorèmes de Cauchy relatifs à l'intégration d'une fonction le long d'un contour donné, et au développement d'une fonction d'une variable complexe suivant les puissances entières et positives de cette variable.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

MANNHEIM (A.). — Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable. Nouvelle méthode des normales. Applications diverses. — *Journal de l'École Polytechnique*, XLIII[e] cahier (*).

On attribue généralement à Ampère l'idée féconde de séparer l'étude du mouvement de celle des forces qui le produisent. Un passage du *Rapport de M. Chasles sur les progrès de la Géométrie* rectifie les idées généralement admises sur ce point. Voici comment s'exprime l'éminent géomètre :

« L'idée d'étudier *les mouvements indépendamment des forces*, qui aurait pu être suscitée depuis fort longtemps par l'objet même de la *Statique*, où l'on traite *de l'équilibre*, c'est-à-dire *des forces, indépendamment des mouvements*, fut émise, il y a trois quarts de siècle, par un jeune capitaine du génie, Carnot, dans son *Essai sur les machines en général*, et reproduite par l'auteur dans sa *Géométrie de position*, puis dans un Rapport à l'Institut. Cependant elle était restée inféconde, ou du moins dans l'oubli, quand Ampère, qui en comprit le caractère, dans son *Essai sur la philosophie des sciences*, regarda l'étude *des mouvements considérés en eux-mêmes* comme devant être le sujet d'une des divisions distinctes de la Mécanique, et associa cette étude à la *Statique*, sous le nom de *Cinématique*. »

Ainsi, pour la millième fois peut-être, c'est à celui qui a trouvé le mot qu'on a attribué l'idée. Quoi qu'il en soit, l'idée de Carnot a déjà porté ses fruits : on connaît maintenant de très-importants théorèmes sur le déplacement d'un corps solide dans l'espace; on doit même penser que la considération du déplacement d'une figure, déjà employée par les anciens, n'a pas dans la science toute la place qu'elle mérite. Heureusement de récents travaux sont venus rappeler et augmenter l'intérêt qui s'attache à ces questions, et prouver que l'étude du déplacement d'une figure invariable peut conduire les géomètres habiles aux résultats les plus dignes d'interêt.

C'est dans le *Bulletin des sciences mathématiques* du baron de Férussac (t. XIV, p. 321-326; 1830) qu'ont paru, croyons-nous, les

(*) Voir *Bulletin*, p. 269.

premiers travaux de M. Chasles sur cette question. C'est dans cette Note que l'auteur donne les propriétés, maintenant bien connues, du centre de rotation. Passant ensuite au déplacement d'une figure dans l'espace, M. Chasles énonce cette proposition fondamentale, que :

Tout déplacement fini d'un corps dans l'espace peut s'effectuer par le mouvement d'une vis dans son écrou.

Cette propriété, à laquelle parvient aussi Poinsot, dans son *Mémoire sur la théorie de la rotation des corps* (*) était ignorée, mais n'était pas nouvelle; c'était, à proprement parler, un théorème retrouvé. Dans une *Notice historique* sur le déplacement d'une figure de forme invariable (**), M. Chasles indique le titre d'un ouvrage italien : *Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi* (Florence, 1763), dû à *Giulio Mozzi,* et dans lequel se trouve énoncée la proposition relative au déplacement hélicoïdal. Mais c'est dans un Mémoire de 1843, inséré aux *Comptes rendus* (***), que M. Chasles a donné les propriétés les plus importantes, celles qui sont relatives aux foyers et aux caractéristiques des plans. Définissons d'abord ces éléments géométriques.

Si, dans un déplacement du corps solide, on considère les plans normaux aux trajectoires des points d'un plan, ces plans normaux passent tous par un point fixe du plan. Ce point fixe s'appelle le *foyer du plan.* C'est le seul point dans le plan dont la trajectoire soit normale au plan.

La *caractéristique* du plan est une droite définie par la propriété suivante. Elle est le lieu des points dont les trajectoires sont tangentes au plan, mais elle n'est pas tangente aux trajectoires de tous ses points. Un seul de ses points, le pied de la perpendiculaire abaissée du foyer sur la caractéristique, jouit de cette propriété; sa trajectoire est tangente à la *caractéristique.*

Tous les plans passant par une droite D ont leurs foyers sur une droite Δ, et réciproquement, le lieu des foyers des plans passant par Δ est la droite D. Ces deux droites D, Δ sont appelées *droites conjuguées* ou *axes de rotation conjugués.*

Les propriétés des droites conjuguées sont très-nombreuses, elles

(*) *Journal de Liouville,* t. XVI, p. 9; 1851.

(**) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. LII, p. 487-501.

(***) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. XVI, p. 1420-1432.

ont été étudiées par M. Chasles. Deux des plus utiles et des plus importantes sont les suivantes :

Toute droite qui s'appuie sur deux droites conjuguées est normale aux trajectoires de tous ses points ;

On peut effectuer le déplacement infiniment petit de la figure par deux rotations successives autour de deux axes conjugués ;

Deux couples de droites conjuguées sont quatre génératrices d'un même système d'un hyperboloïde à une nappe, etc., etc.

Ces propriétés sont celles dont M. Mannheim a fait surtout usage dans son Mémoire ; aussi les avons-nous remises de préférence sous les yeux de nos lecteurs.

Enfin M. Chasles a publié en 1861 (*) un *Mémoire* sur les propriétés relatives au déplacement fini quelconque, dans l'espace, d'une figure de forme invariable. C'est à la fin de ce Mémoire qu'est placée une *Notice historique sur la question du déplacement d'une figure de forme invariable,* qui nous dispense d'entrer dans un examen historique plus complet de la question du déplacement d'un corps solide.

Le travail de M. Mannheim fait suite aux Mémoires précédents ; mais l'auteur a surtout traité un problème négligé par presque tous les géomètres qui ont écrit sur la question. Son but n'a pas été de donner seulement des propriétés nouvelles du déplacement d'un corps solide. M. Mannheim considérant, non plus un corps solide, mais une figure assujettie, dans son déplacement, à des conditions très-diverses, s'est proposé de donner une méthode pour construire les normales aux trajectoires, de même que M. Chasles avait déduit, de l'étude du mouvement dans le plan, un moyen nouveau et important de construire, par la géométrie, les tangentes à un grand nombre de courbes remarquables.

Dans la résolution de ce problème, une première difficulté se présentait, qui pouvait rendre la solution très-longue et très-pénible. Les conditions auxquelles on peut assujettir une figure dans son déplacement sont très-variées : comment les considérer toutes et ramener la solution à un principe uniforme ? C'est une difficulté que M. Mannheim écarte d'abord d'une manière très-ingénieuse. Voici

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences :* t. LI, p. 855-863, 905-914 ; t. LII, p. 77-85, 189-197 et 487-501.

les principales conditions descriptives qu'on rencontre dans les problèmes :

1° Un point a de la figure mobile est assujetti à rester sur une surface fixe A, ou, inversement, une surface B de la figure mobile doit toujours passer par un point b;

2° Une courbe C de la figure mobile est assujettie à toucher une surface S, ou inversement;

3° Une courbe C doit rencontrer une courbe fixe M;

4° Une surface S est assujettie à toucher une surface S'.

Il faut cinq conditions de cette nature pour définir et diriger le déplacement d'un corps solide. M. Mannheim substitue à chacune de ces conditions simples une condition unique : *un point doit rester sur une surface,* et, dès lors, le seul problème à traiter est le suivant :

Cinq points d'une figure de forme invariable sont assujettis à se déplacer sur cinq surfaces données. — Construire à un instant quelconque : 1° le plan normal à la trajectoire d'un point quelconque de la figure mobile; 2° la normale en un point arbitraire de la surface engendrée par une courbe quelconque; 3° la ligne suivant laquelle une surface entraînée touche son enveloppe; 4° l'axe du déplacement de la figure mobile; 5° le pas réduit des hélices infiniment petites décrites.

A cet effet, soient A, B, C, E, K les surfaces données, et soient a, b, c, e, k les cinq points de la figure mobile assujettis à rester sur les cinq surfaces. Si l'on construit les deux droites qui s'appuient sur quatre des normales en quatre des points a, b, c, e, k, ces deux droites seront des *droites conjuguées.* On pourra ainsi obtenir, avec les cinq combinaisons quatre à quatre des normales, cinq couples de droites conjuguées.

Cela posé, soit i le point dont on demande le plan normal. De ce point menons une droite rencontrant deux droites conjuguées : cette droite est normale à la trajectoire de tous ses points, et en particulier à celle du point i; elle fait donc partie du plan normal cherché; en considérant les quatre autres couples de droites conjuguées, on déterminera le plan normal par cinq droites, correspondant aux cinq couples de droites conjuguées; on retrouve ainsi un théorème dû à M. Sylvester (*).

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* 1861, t. LII, p. 742.

Après la résolution de ce premier problème, le savant professeur à l'École Polytechnique aborde une question d'une tout autre nature, mais non moins intéressante. Supposons que le corps solide soit assujetti dans son déplacement à quatre conditions seulement. Alors il pourra recevoir une infinité de déplacements dans des sens différents, compatibles avec ces conditions. Les points seront assujettis à rester, non plus sur une courbe, mais sur une surface. Il y a donc lieu de se proposer le problème suivant :

Quatre points d'une figure de forme invariable sont assujettis à se déplacer sur quatre surfaces données. — Construire à un instant quelconque : 1° la normale à la surface sur laquelle se déplace nécessairement, en général, un point de la figure mobile; 2° les points où une surface entraînée touche le lieu de ses intersections successives.

La solution est donnée par le théorème suivant :

Lorsqu'une figure de forme invariable se déplace en restant assujettie à quatre conditions, à un instant quelconque, les normales issues de tous les points de la figure aux surfaces trajectoires de ces points rencontrent deux mêmes droites.

A ce théorème, M. Mannheim ajoute beaucoup d'autres propriétés, que le défaut d'espace nous empêche seul de signaler.

Le Mémoire contient, après ces propositions générales, une série d'applications au déplacement d'une droite, d'un dièdre, d'un trièdre et d'une surface, applications dont nous allons dire quelques mots.

Dans l'étude sur les surfaces réglées et le déplacement d'une droite sont abordés plusieurs problèmes, parmi lesquels nous citerons le suivant :

Recherche de la normale en un point d'une surface gauche, engendrée par une droite assujettie à des conditions multiples.

Une droite G *se déplace en restant surosculatrice d'une surface donnée* A ; *construire en un point quelconque de cette droite la normale à la surface* G *qu'elle engendre, et le plan normal en un point de la courbe de contact de* G *et de* A.

Ce Mémoire se termine par une étude sur les conditions multiples, auxquelles on peut assujettir un corps solide, et sur l'hélicoïde réglé. Cette étude très-simple d'une surface remarquable a déjà pris place dans l'enseignement de l'École Polytechnique.

Nous ne devons pas terminer ce trop court article, sans signaler un très-important Rapport que M. Chasles a consacré au Mémoire de M. Mannheim. A la suite de ce Rapport (*), l'Académie a ordonné l'insertion du Mémoire précédent dans le tome XX du *Recueil des Savants étrangers*. G. D.

KLINKERFUES (Dr W.), Professor, Director der Königl. Sternwarte zu Göttingen. — THEORETISCHE ASTRONOMIE. *Erste Abtheilung.* — Braunschweig; Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn, 1871.

Après l'apparition récente des ouvrages de Watson et d'Oppolzer (**) sur l'astronomie théorique, nous avons aujourd'hui à signaler un nouveau travail sur le même sujet, ce qui montre jusqu'à quel point se faisait sentir le manque d'un livre qui résumât sous une forme commode les nombreux travaux épars dont la science astronomique s'est enrichie dans ces dix dernières années au point de vue théorique, et qui rendît ces travaux accessibles à un plus grand nombre de lecteurs. Comme le traité d'Oppolzer, celui que nous avons sous les yeux n'est pas encore un ouvrage complet, mais seulement le premier des deux volumes, dont l'ensemble doit comprendre tout ce qui peut servir à la détermination des orbites des corps qui se meuvent suivant des sections coniques autour d'un centre commun d'attraction. Le volume qui vient de paraître se compose de quatre sections :

I. Calcul des éphémérides, les orbites étant connues;

II. Calcul d'une orbite circulaire au moyen de deux observations;

III. Calcul d'une orbite de comète au moyen de trois observations;

IV. Calcul d'une orbite elliptique (de planète) au moyen de trois observations.

Le second volume contiendra, outre la suite de la section IV, les cinq sections suivantes :

V. Calcul d'une orbite elliptique au moyen de quatre observations;

(*) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXVI, p. 591.

(**) Voir *Bulletin*, p. 201.

VI. Calcul d'une orbite au moyen d'un plus grand nombre d'observations, d'après la méthode des moindres carrés;

VII. Calcul des orbites des étoiles doubles;

VIII. Calcul des orbites des météorites;

IX. Tables et vérifications.

L'ouvrage est rédigé par leçons, forme très-avantageuse pour l'usage du livre dans l'enseignement et pour l'étude personnelle. Nous espérons voir s'accomplir le vœu exprimé par l'auteur, que son livre engage un plus grand nombre de personnes à se livrer à l'astronomie théorique, et un traité écrit avec la clarté qui distingue celui-ci ne contribuera pas peu à cet heureux résultat.

(Extrait des *Astronomische Nachrichten*, t. LXXVII, n° 1830.)

HESSE (OTTO), ordentl. Professor an dem K. Polytechnicum zu München. — DIE DETERMINANTEN, ELEMENTAR BEHANDELT. — Leipzig; Druck und Verlag von B.-G. Teubner, 1871 (*).

Cet opuscule a été composé par l'auteur à l'occasion d'un arrêté ministériel du 5 octobre 1870, prescrivant l'étude des déterminants dans les six colléges scientifiques (*Real-Gymnasien*) du royaume de Bavière.

Le premier chapitre, intitulé *Équations linéaires*, signale d'abord les inconvénients de la méthode ancienne de résolution de ces équations par éliminations successives. En premier lieu, on ne parvient à connaître la composition des deux termes de la valeur de chaque inconnue qu'après avoir effectué complétement de longs et pénibles calculs. Ensuite cette méthode ne donne pas immédiatement les résultats sous la forme la plus simple, les deux termes de la fraction se présentant affectés d'un facteur commun, dont le degré croît rapidement avec le nombre des équations et des inconnues. Enfin cette méthode a le défaut de ne pas permettre de traiter symétriquement les équations.

On écarte ce dernier inconvénient par la méthode des multiplicateurs indéterminés, employée déjà par Bézout au siècle dernier, et par laquelle on élimine toutes les inconnues à la fois, excepté une

(*) HESSE (O.) — *Traité élémentaire des Déterminants.* — Leipzig, B.-G. Teubner. Brochure in-8°, 46 pages. Prix : ½ thaler.

seule, en ramenant le problème à la résolution d'un nombre d'équations moindre d'une unité.

L'auteur expose les liaisons qui existent entre deux systèmes d'équations linéaires dans lesquels les lignes verticales des coefficients de l'un seraient les lignes horizontales des coefficients de l'autre.

Il donne ensuite les expressions des numérateurs et du dénominateur commun des valeurs des inconnues sous forme de produits symboliques.

Le second chapitre traite des *Fonctions alternées*, dont le type est le produit formé avec toutes les différences deux à deux de $n+1$ éléments. La considération de ce produit, qui, pris dans le sens symbolique, par le changement des exposants en indices, représente précisément les termes des valeurs des inconnues dans la résolution de $n+1$ équations linéaires, fait connaître déjà les propriétés essentielles des *déterminants*, dont l'étude fait l'objet du troisième et dernier chapitre.

Dans ce chapitre, l'auteur expose les propriétés connues, au point de vue purement théorique, et sans indiquer d'applications. La notation qu'il emploie est celle de Jacobi, qui consiste à placer les deux indices de chaque élément l'un en bas, l'autre en haut de la lettre, ce qui nous paraît préférable, sous plusieurs rapports, au mode plus généralement adopté, suivant lequel les deux indices sont placés au bas de la lettre.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

Société des Sciences naturelles du grand-duché de Luxembourg. — Luxembourg, chez V. Buck (*).

T. X, 1867-1868.

De Colnet-d'Huart. — *Leçons sur la théorie mathématique du mouvement de translation et du mouvement de rotation des atomes.* (96 p.; fr.)

Cet important Mémoire se compose de sept Leçons, dont voici le contenu :

I. Équations du mouvement de translation des molécules, en sup-

(*) Publié par volumes in-8°, en français et en allemand.

posant qu'elles s'attirent ou se repoussent proportionnellement à leurs masses et en fonction des distances qui les séparent. — *Premier principe :* Lorsqu'une molécule est déplacée de sa position d'équilibre, elle est repoussée vers celle-ci par une force proportionnelle à ce déplacement.

II. Équations du mouvement de rotation des molécules. — *Théorèmes :* Dans les corps homogènes et d'élasticité constante, la forme des molécules est sphérique. — L'axe instantané de rotation est toujours perpendiculaire à la direction de la propagation des petits mouvements moléculaires. — Les forces qui sollicitent une molécule à se déplacer longitudinalement ne sauraient faire tourner la molécule, tandis que les forces qui sollicitent la molécule à se déplacer transversalement lui impriment en même temps un mouvement de rotation autour de son centre de figure. — Composantes de la rotation autour des axes des x et des y. — Direction de l'axe instantané de rotation quand la lumière est polarisée en ligne droite. — La vitesse de rotation des ondes surpasse de beaucoup la vitesse des vibrations. — Les axes instantanés des molécules voisines sont sensiblement parallèles.

III. Équations qui régissent le mouvement de la chaleur dans les corps cristallins et dans les corps homogènes et d'élasticité constante. — La température d'un corps pondérable est mesurée par la vitesse de rotation de ses molécules. — *Deuxième principe :* Les molécules se repoussent proportionnellement à leur vitesse de rotation, et cette force répulsive est dirigée perpendiculairement à l'axe instantané. — Équation de Fourier pour le mouvement de la chaleur dans les corps homogènes. — Équation du mouvement de la chaleur dans une plaque. — Action du mouvement de rotation sur le déplacement longitudinal. — Équations des petits mouvements moléculaires.

IV. Action mécanique de la chaleur. — État stationnaire des molécules. — Pression sur la surface d'un corps. Traction. — Lois de Mariotte et de Gay-Lussac. — Chaleur spécifique. — Travail utile. Travail intermoléculaire.

V. L'équivalent mécanique d'une calorie. — Courbes isothermes et isodynames des gaz permanents. Courbe adiabatique. — Équation fondamentale de la théorie mécanique de la chaleur. — Théorème général.

VI. Propagation des sons. La vitesse de propagation des ondes sonores est accélérée par le travail qui résulte des condensations et

des dilatations des couches d'air. Formule de Laplace. — Lorsqu'un corps s'échauffe ou se refroidit, cet échauffement ou ce refroidissement est toujours accompagné de vibrations longitudinales; mais ces vibrations ne sont pas sonores. — Problème du refroidissement d'un mur avec dilatation.

VII. Les atomes pondérables des corps diaphanes vibrent lumineusement. — Dispersion de la lumière et des rayons obscurs. Diathermansie.

The TRANSACTIONS of the Royal Irish Academy. — Dublin; published by the Academy (*).

T. XXIII, 1856-1859.

Haughton (S.). — *Discussion des observations de marées faites sous la direction de l'Académie royale d'Irlande en 1850-1851.* (106 p.)

Mallet (R.). — *Sur les conditions physiques exigées dans la construction de l'artillerie et sur quelques causes, inexpliquées jusqu'ici, de la destruction des canons par le service.* (296 p.)

Renny (H.-L.). — *Sur une nouvelle formule barométrique pour la mesure de la hauteur des montagnes, dans laquelle l'état hygrométrique de l'atmosphère est considéré systématiquement.* (12 p.)

Cette formule est la suivante :

$$H = K(1+\zeta\cos 2\psi)\left(1+\frac{2h+H}{r}\right)\left(1+l\,\frac{t+t'}{2}\right)$$
$$\times \log.\,\text{vulg.}\,\frac{\beta\left(1+\frac{2H}{r}\right)-\frac{3}{8}\sqrt{ff'}}{\beta'[1+m(T-T')]-\frac{3}{8}\sqrt{ff'}},$$

K, ζ, l, m étant des constantes, ψ la latitude; h, h' les hauteurs des stations au-dessus du niveau de la mer; r le rayon terrestre; $H = h' - h$ la différence de niveau des stations; t, t' les températures de l'air (en degrés centigrades); β, β' les pressions barométriques observées; T, T' les températures du mercure; f, f' les forces élastiques de la vapeur d'eau aux deux stations.

Downing (S.). — *Sur le desséchement du lac de Harlem.* (12 p.)

(*) Paraît par livraisons gr. in-4° en langue anglaise.

Salmon (G.). — *Sur le degré d'une surface réciproque d'une surface donnée.* (28 p.)

L'auteur a montré, dans le *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* (t. II, p. 65, et t. IV, p. 187), comment on calcule le degré d'une surface réciproque ayant une ligne double ordinaire; il reste à indiquer quel sera ce degré quand la surface a encore une ligne *cuspidale*, c'est-à-dire une ligne double en chaque point de laquelle les deux plans tangents coïncident. Vient ensuite l'examen de la nature et du nombre des plans tangents singuliers d'une surface, qui donnent lieu à des points et à des lignes multiples dans la surface réciproque, et l'on fait voir ainsi comment il se fait que le degré de la réciproque coïncide avec le degré de la surface primitive, ce qui conduit à des théorèmes analogues aux théorèmes bien connus de Plücker sur les courbes. Enfin, l'auteur applique sa théorie au cas des surfaces développables, et montre comment il se fait que le degré de la réciproque de la surface développable se réduit à zéro.

Forster (R.). — *Sur la formation moléculaire des cristaux.* (12 p.)

Lloyd (H.). — *Détermination de la mesure absolue de l'intensité du magnétisme terrestre, au moyen de la boussole d'inclinaison.* (11 p.)

Renny (H.-L.). — *Sur les constantes des formules barométriques qui tiennent compte exactement de l'état hygrométrique de l'atmosphère.* (46 p.)

Après une nouvelle discussion, l'auteur donne à sa formule, indiquée dans son précédent Mémoire, la forme définitive suivante :

$$H = 18409^{m},9(1+0,002695\cos 2\psi)\left(1+\frac{2h+H}{r}\right)\left(1+0,003665\,\frac{t+t'}{2}\right)$$
$$\times \log\frac{B-\delta}{B'-\delta} \pm \text{correction horaire},$$

B, B′ étant les pressions observées, corrigées de la densité du mercure, et δ désignant la quantité $\frac{3}{8}\sqrt{ff'}$.

T. XXIV, 1860-1870.

Lloyd (H.). — *Sur la lumière réfléchie et transmise par les plaques minces.* (13 p.)

L'auteur traite la question dans le cas général de la lumière polarisée dans un plan quelconque.

Donovan (M.). — *Sur un cadran solaire mobile, pouvant indiquer le temps solaire apparent à une petite fraction de minute près.* (13 p.)

Stoney (J.). — *Sur des anneaux aperçus dans des échantillons fibreux de spath calcaire.* (6 p.)

Stoney (J.). — *Sur la propagation des ondes.* (8 p.)

Lloyd (H.). — *Sur les courants terrestres, et leur liaison avec la variation diurne de l'aiguille magnétique horizontale.* (27 p., 2 pl.)

Stoney (B.). — *Sur la flexion relative des poutres treillissées et des sommiers plats.* (5 p.)

Haughton (S.). — *Sur les marées semi-diurnes des côtes d'Irlande.* (10 art., 115 p., 10 pl.)

Hennessy (H.). — *Sur la distribution de la température dans la région inférieure de l'atmosphère terrestre.* (58 p.)

Casey (J.). — *Sur les quartiques bicirculaires.* (113 p.)

Si l'on prend l'équation la plus générale du second degré en α, β, γ,

$$(a, b, c, f, g, h)(\alpha, \beta, \gamma)^2 = 0,$$

où α, β, γ désignent des cercles au lieu de droites, on obtient la forme la plus générale de l'équation d'une quartique bicirculaire. Ces courbes jouissent de propriétés remarquables, que l'auteur a étudiées par une méthode analogue à celle que l'on emploie pour les coniques. Ses recherches contiennent une discussion approfondie des ovales de Descartes, qui rentrent, comme cas particulier, dans la classe des courbes considérées.

Ball (R.-St.). — *Sur les petites oscillations d'un corps solide autour d'un point fixe sous l'action de forces quelconques, et, en particulier, lorsque la pesanteur est la seule force agissante.* (35 p.)

En prenant pour origine le point fixe, et pour axes coordonnés les positions des trois axes principaux d'inertie dans l'état de repos du corps, on suppose le corps légèrement déplacé de sa position d'équilibre, et il s'agit de savoir si les petites oscillations sont possibles et, lorsqu'elles le sont, de discuter leur nature.

Les équations du mouvement dépendent de la résolution d'une équation du troisième degré, dont les racines déterminent la nature

de l'équilibre. Quand l'équilibre est stable, sous l'action de forces quelconques, le mouvement du corps résulte de la composition des vibrations autour de trois axes fixes passant par le point fixe, et chacune des vibrations autour d'un de ces axes s'effectue suivant la loi du pendule ordinaire. C'est ce qui a lieu lorsque les trois racines de l'équation du troisième degré sont réelles, positives et inégales.

L'auteur discute complétement tous les autres cas qui peuvent se présenter et s'occupe, dans chaque cas, de la détermination des *axes normaux*, en désignant par *axe normal* une direction passant par le point fixe, et autour de laquelle le corps oscillera comme autour d'un axe fixe, lorsque l'*axe de déplacement* et l'axe instantané ont cette direction pour position initiale commune.

PROCEEDINGS OF THE ROYAL IRISH ACADEMY. — Dublin; printed by M. H. Gill, printer to the Academy (*).

T. VIII, 1861-1864.

HAUGHTON (S.). — *Sur un moyen graphique pour calculer la dérive d'un navire par la marée dans la Mer d'Irlande.* (4 p.)

HAMILTON (Sir W.-R.). — *Sur une nouvelle méthode générale pour l'inversion d'une fonction linéaire et quaternionale d'un quaternion.*

HAMILTON (Sir W.-R.). — *Sur l'existence d'une équation symétrique et biquadratique, qui est satisfaite par le symbole d'opération linéaire sur les quaternions.*

STONEY (B.-B.). — *Sur la résistance des longs piliers.*

HAMILTON (Sir W.-R.). — *Sur les courbes gauches du troisième degré.*

PURSER (J.). — *Sur l'application des équations du mouvement relatif, de Coriolis, au problème du gyroscope.* (14 p.)

Coriolis a montré que, si les axes coordonnés auxquels est rapporté le mouvement du système ne sont pas fixes, mais ont un mouvement propre dans l'espace, on peut traiter la question, à tous les points de vue, comme si ces axes étaient fixes, pourvu qu'à la force P,

(*) *Procès-verbaux de l'Académie royale d'Irlande.* Dublin; M.-H. GILL. Publiés par volumes in-8°, paraissant en quatre fascicules, à des époques variables. En langue anglaise.

qui agit sur chaque molécule, on en ajoute deux autres : l'une P', égale et opposée à celle qui imprimerait à la molécule des accélérations égales à celles d'un point coïncidant à l'instant considéré avec la molécule, mais invariablement lié aux axes mobiles; l'autre P'', perpendiculaire à la trajectoire relative de la molécule. En partant de ce théorème, l'auteur traite la question dans trois cas principaux : 1° celui où l'axe est assujetti à rester dans un plan; 2° celui où il est assujetti à décrire un cône de révolution; 3° celui où il est entièrement libre.

Hamilton (Sir W.-R.). — *Sur un centre général des forces appliquées.*

Hamilton (Sir W.-R.). — *Sur les huit génératrices ombilicales imaginaires d'une surface à centre du second degré.*

Les douze ombilics connus d'une telle surface sont situés sur *huit droites imaginaires,* dont l'auteur a déterminé les équations et les propriétés à l'aide de la méthode des quaternions.

T. IX, 1864-1866.

Graves (Ch.). — *Sur un théorème relatif aux coefficients binomiaux.*

Si l'on pose $(1+x)^n = \Sigma n_p x^p$, n étant entier et positif, et

$$s_0 = \Sigma n_{3q}, \quad s_1 = \Sigma n_{3q+1}, \quad s_2 = \Sigma n_{3q+2},$$

parmi les trois nombres s_0, s_1, s_2, il y en aura toujours deux qui seront égaux entre eux et qui différeront du troisième d'une unité.

Hamilton (Sir W.-R.). — *Remarques sur la Note précédente.*

Soit p un nombre entier positif quelconque, r un nombre entier, $s_{n,r}^{(p)}$ la somme de tous les coefficients n_m pour lesquels $m \equiv r \pmod{p}$. On a

$$s_{n,r}^{(p)} = \frac{1}{p} \sum \frac{(1+x)^n}{x^r},$$

la sommation s'étendant aux p racines x de l'équation binôme $x^p - 1 = 0$.

Hamilton (Sir W.-R.). — *Sur un nouveau système de deux équations générales de courbure.*

Renfermant comme conséquences immédiates une nouvelle forme de l'équation différentielle de l'ensemble des deux lignes de courbure, avec une nouvelle preuve de leur rectangularité générale; et en outre

une nouvelle équation du second degré pour la détermination simultanée des deux rayons de courbure; le tout établi par la seconde méthode de Gauss pour la discussion générale des propriétés d'une surface, et la seconde équation étant vérifiée par une comparaison des expressions pour la mesure de la courbure.

Graves (Ch.). — *Notice nécrologique sur Sir William-Rowan Hamilton.* (9 p.)

Casey (J.). — *Sur les équations et les propriétés* : 1° *du système des cercles tangents à trois cercles dans un plan;* 2° *du système des sphères tangentes à trois sphères dans l'espace;* 3° *du système des cercles tangents à trois cercles sur une sphère;* 4° *du système des coniques inscrites à une conique, et tangentes à trois coniques inscrites dans un plan.* (26 p.)

T. X, 1867-1870.

Penny (W.-G.). — *Sur le mouvement de rotation des corps célestes.* (32 p.)

L'objet de ce Mémoire est, en premier lieu, de rechercher si les diverses forces perturbatrices qui agissent sur les corps célestes produisent un effet permanent sur leur rotation; et, en second lieu, en supposant qu'un tel effet se produise en général, d'examiner dans quelles circonstances il cessera d'avoir lieu, c'est-à-dire sous quelles conditions ces corps prendraient un mouvement de rotation permanent, sans autres variations que des variations périodiques.

Young (J.-R.). — *Sur les racines imaginaires des équations numériques, avec un examen et une démonstration de la règle de Newton.* (40 p.)

ANNALI di Matematica pura ed applicata, diretti da F. Brioschi e L. Cremona (presso il R. Istituto Tecnico superiore di Milano), in continuazione degli Annali già pubblicati in Roma dal prof. Tortolini. *Serie II^a^*. Milano, tipografia di G. Bernadoni (*).

T. I, juillet 1867 à mai 1868.

Brioschi (F.). — *Sur la théorie des coordonnées curvilignes.* (22 p.; it.)

(*) *Annales de Mathématiques pures et appliquées*, dirigées par MM. Brioschi et Cre-

Dans un très-important Mémoire inséré au *Journal de M. Liouville* (t. V, 2e série, 1860), et intitulé : *Sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes*, M. O. Bonnet a exposé une théorie complète des surfaces non développables, fondée sur la considération des variables qui servent à fixer la position du plan tangent. Seulement, dans ce travail, M. Bonnet avait fait choix d'un système particulier de variables, servant à déterminer la position d'un plan. M. Brioschi étudie la même question sans spécifier quelles sont les variables choisies pour la détermination du plan tangent.

Clebsch et Gordan. — *Sur la représentation typique des formes binaires*. (58 p.; it.)

Betti (E.). — *Sur les fonctions sphériques*. (8 p.; it.)

Christoffel (E.-B.). — *Sur le problème des températures stationnaires et la représentation conforme d'une surface donnée*. (15 p.; it.)

Schlaefli (L.). — *Sur le mouvement d'un pendule, quand la droite passant par le point de suspension et par le centre de gravité est pour ce point le seul axe principal d'inertie qui soit déterminé de position*. (27 p.; it.)

Cayley (A.). — *Démonstration nouvelle du théorème de M. Casey par rapport aux cercles qui touchent trois cercles donnés*. (3 p.; fr.)

Roberts (Michael). — *Note sur les équations du cinquième degré*. (4 p.; fr.)

Wiener (Chr.). — *Sur le mouvement d'une figure plane qui se meut en restant semblable à elle-même et de manière que trois de ses droites passent par trois points fixes*. (7 p.; it.)

---

mona (près l'Institut Technique supérieur de Milan); suite des Annales, publiées ci-devant à Rome, par le professeur Tortolini. 2e *série*. Milan, imprimerie de J. Bernadoni.

Ces *Annales* paraissent à époques indéterminées, par fascicules de dix à douze feuilles in-4°, en italien, en français et en latin. Quatre fascicules forment un volume. Prix : 16 francs.

Nous donnons, sans grand développement, les titres des Mémoires des deux premiers volumes, afin que nos lecteurs connaissent la collection complète. A partir du tome III, nous entrerons dans une analyse plus détaillée.

Dini (U.). — *Sur les surfaces qui ont des lignes de courbure planes.* (9 p.; it.)

Hermite. — *Sur l'intégrale* $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. (4 p.; fr.)

Brioschi (F.). — *Du discriminant des formes binaires du sixième degré.* (1 p.; it.)

Plücker (J.). — *Théorie générale des surfaces réglées, leur classification et leur construction.* (10 p.; fr.)

Jordan (C.). — *Sur la stabilité de l'équilibre des corps flottants.* (52 p.; fr.)

Brioschi (F.). — *Solution générale de l'équation du cinquième degré.* (10 p.; it.)

Schlaefli (L.). — *Sur les relations entre diverses intégrales définies qui servent à exprimer la solution générale de l'équation de Riccati.* (11 p.; it.)

Schlaefli (L.). — *Quelques observations sur les fonctions de Laplace.* (7 p.; it.)

Cremona (L.). — *Représentation d'une classe de surfaces gauches sur un plan et détermination de leurs courbes asymptotiques.* (11 p.; it.)

Il s'agit, dans cet article, des surfaces ayant deux directrices rectilignes.

Schramm (H.). — *Les invariants et les covariants, en qualité de critères pour les racines d'une équation.* (21 p.; fr.)

Neumann (C.). — *Application du calcul barycentrique à la courbure des courbes et des surfaces algébriques.* (2 art., 5 p.; it.)

Curtze (M.). — *Notes diverses sur la série de Lambert et sur la loi des nombres premiers.* (8 p.; fr.)

Codazzi. — *Sur les coordonnées curvilignes d'une surface et de l'espace.* (24 p.; it.)

Geiser (F.). — *Sur les normales à l'ellipsoïde.* (12 p.; it.)

Le but de cet article est de démontrer *synthétiquement* les théorèmes qui se rapportent aux normales à l'ellipsoïde.

Beltrami (E.). — *Des variables complexes sur une surface quelconque.* (38 p.; it.)

Gordan (P.). — *Application du* « Mémoire sur la représentation typique des formes binaires » *aux équations modulaires de la transformation du cinquième ordre.* (6 p.; it.)

Betti (E.). — *Sur la détermination des températures variables d'une plaque limitée.* (7 p.; it.)

T. II, août 1868 à juin 1869.

Reye (T.). — *Sur les axes des coniques situées sur une surface du second ordre.* (12 p.; it.)

Roberts (Michael). — *Sur l'application du théorème d'Abel à la comparaison des arcs des lignes de courbure d'un ellipsoïde.* (8 p.; fr.)

Matthiessen (L.). — *Sur quelques propriétés des intégrales eulériennes de première et de seconde espèce.* (7 p.; it.)

Dini (U.). — *Sur les produits infinis.* (11 p.; it.)

Aoust (l'abbé). — *Théorie des coordonnées curvilignes quelconques.* (26 p.; fr.)

Siebeck (H.). — *Du triangle dont les côtés contiennent des pôles conjugués par rapport à quatre sections coniques.* (26 p.; lat.)

Booth (J.). — *Sur la rectification de quelques courbes.* (8 p.; fr.)

Schlaefli (L.). — *Sur une équation aux dérivées partielles du premier ordre.* (8 p.; it.)

Hermite. — *Sur le développement en série des intégrales elliptiques de première et de seconde espèce.* (2 p.; fr.)

Cayley (A.). — *Note sur quelques torses sextiques.* (2 p.; fr.)
M. Cayley appelle *torse* une surface développable.

Codazzi (D.). — *Sur les coordonnées curvilignes d'une surface et de l'espace.* Deuxième Mémoire. (19 p.; it.)

Neumann. — *Théorie nouvelle des phénomènes électriques.* (9 p.; lat.)

Reye (T.). — *Sur les courbes gauches de quatrième ordre et de pre-*

mière espèce et sur leurs points d'intersection avec les surfaces du second degré. (5 p.; it.)

HABICH (E.). — *Sur un système particulier de coordonnées. Application aux caustiques planes*. (16 p.; it.)

TRUDI (N.). — *Sur la forme quadratique des facteurs irréductibles d'une équation binôme*. (17 p.; it.)

JORDAN (C.). — *Mémoire sur les groupes de mouvements*. (49 p.; fr.)

GENOCCHI (A.). — *Sur un théorème de Cauchy*. (3 p.; it.)

CAYLEY (A.). — *Addition à la Note sur quelques torses sextiques*. (3 p.; fr.)

REYE (T.). — *Sur les courbes gauches de quatrième ordre et de première espèce*. Suite et fin. (2 p.; it.)

ROBERTS (Michael). — *Sur l'expression la plus simple de certaines fonctions des différences des racines d'une équation du cinquième degré*. (5 p.; fr.)

BELTRAMI (E.). — *Théorie fondamentale des espaces de courbure constante*. (24 p.; it.) (*)

GENOCCHI (A.). — *Sur quelques formes de nombres premiers*. (13 p.; it.)

CODAZZI (D.). — *Sur les coordonnées curvilignes d'une surface et de l'espace*. Troisième Mémoire. (19 p.; it.)

LIPSCHITZ (R.). — *Sur la possibilité d'intégrer complétement un système donné d'équations différentielles ordinaires*. (15 p.; it.)

CASEY (J.). — *Recherche des équations des couples de quadriques inscrites dans une quadrique donnée et tangentes à quatre quadriques inscrites aussi dans le même quadrique*. (15 p.; fr.)

SMITH (H.-S.). — *Observation de Géométrie*. (4 p.; lat.)

JORDAN (C.). — *Mémoire sur les groupes de mouvements*. Suite et fin. (24 p.; fr.)

(*) Voir *Bulletin*, p. 29.

Gordan (P.). — *Application de quelques résultats contenus dans le Mémoire* « Sur la représentation typique des formes binaires des cinquième et sixième degrés » *aux intégrales hyperelliptiques.* (2 p.; it.)

COMPTES RENDUS hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, publiés par MM. les Secrétaires perpétuels (*).

T. LXX.

N° 20. Séance du 16 mai 1870.

M. Bertrand. — *Rapport sur un Mémoire de M. Moutard, relatif à la théorie des équations différentielles partielles du second ordre.*

« Les remarquables travaux qui, dans ces derniers temps, ont fait de la théorie des équations différentielles partielles du premier ordre l'une des plus parfaites du calcul intégral ont exercé peu d'influence sur l'étude des équations du second ordre. La forme même du résultat reste cachée dans ce cas, et la savante analyse d'Ampère, dans son admirable Mémoire de 1814, a été loin d'embrasser l'infinie variété des combinaisons possibles. Les géomètres, en étudiant dans sa théorie l'expression la plus parfaite des méthodes proposées jusqu'ici, doivent chercher à introduire plus de généralité dans la forme des résultats, à obtenir plus de certitude et de précision dans les méthodes qui en font connaître la possibilité.

» C'est à cette dernière partie du problème que se rapporte le Mémoire de M. Moutard. Laissant de côté le plus grand nombre des formes d'intégrales énumérées par Ampère, il s'attache exclusivement à la plus simple de toutes pour rechercher les équations auxquelles elle peut convenir. En nommant x et y les deux variables indépendantes dont dépend la fonction inconnue z, M. Moutard suppose que l'une fonctions arbitraires contenues dans l'intégrale générale contienne x seulement et l'autre y seulement, et que toutes deux figurent avec un nombre fini de leurs dérivées.

» Quelles sont les équations auxquelles convient une intégrale générale de cette forme ?

» Tel est le problème que se propose d'abord M. Moutard. Il est

(*) Voir *Bulletin*, p. 211.

intéressant et utile pour la théorie générale, et l'on doit féliciter l'auteur de l'avoir complétement résolu.

» Après avoir montré, comme Ampère, que l'équation différentielle, dans ce cas, ne doit renfermer que la seule dérivée du second ordre $\frac{d^2 z}{dx\,dy}$, désignée habituellement par s, M. Moutard obtient cinq formes distinctes qui comprennent tous les cas possibles : deux d'entre elles sont immédiatement intégrables, la troisième a été rencontrée et complétement intégrée par M. Liouville, les deux autres enfin appartiennent aux mêmes types et se réduisent aisément l'une à l'autre.

» Toute la difficulté se trouve donc concentrée sur une seule forme, que M. Moutard réduit à

$$\frac{d^2\alpha}{du\,dv} = \frac{dlA}{du}\frac{d\alpha}{dv} + AB\alpha,$$

où α représente une fonction inconnue de u et de v, et A et B des fonctions données, qui, bien entendu, pour que l'intégrale ait la forme demandée, doivent elles-mêmes remplir certaines conditions.

» La seconde partie du Mémoire est consacrée à leur étude et à la recherche de l'intégrale dans le cas où elles sont remplies. La voie très-directe suivie par M. Moutard, et imposée en quelque sorte par la manière dont il a abordé le problème, le conduit ici sur un terrain connu. Laplace, en 1773, a donné, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, une méthode qui, par des essais successifs, permet de résoudre la première partie du problème, en formant, suivant une loi régulière, une série d'expressions déduites des coefficients de l'équation donnée. Il faut et il suffit, pour que l'intégration soit possible sous la forme supposée, que l'une de ces expressions soit égale à zéro, et le rang qu'elle occupe dans la série indique le nombre des dérivées de l'une des fonctions arbitraires qui doit figurer dans l'intégrale.

» En suivant jusqu'au bout, avec un plein succès, les conséquences de cette méthode, M. Moutard obtient la forme la plus générale des équations considérées, dans la formation desquelles il introduit autant de fonctions arbitraires distinctes qu'il le désire de chacune des variables x et y.

» La troisième partie du Mémoire est consacrée à l'étude très-

complète et très-intéressante de l'équation

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} = z\varphi(x, y),$$

à laquelle se réduit l'équation plus générale traitée précédemment dans un cas particulier, auquel ne sont pas applicables les résultats précédemment obtenus; deux équations de condition, en général distinctes, se réduisent alors à une seule, et les conséquences qui s'en déduisent sont entièrement changées.

» M. Moutard, après avoir formé l'équation unique à laquelle doit satisfaire la fonction $\varphi(x, y)$ pour que l'intégrale ait la forme supposée, parvient à l'intégrer avec beaucoup de bonheur et de talent, en la ramenant à l'équation semblable d'ordre inférieur de deux unités, obtenue en supposant que la méthode exige une opération de moins.

» En résumé, nous pensons que le Mémoire de M. Moutard mérite l'approbation de l'Académie, et nous lui proposons d'en décider l'insertion dans le *Recueil des Savants étrangers.* »

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

M. Mannheim. — *Recherches sur les pinceaux de droites et les normalies, contenant une nouvelle exposition de la théorie de la courbure des surfaces.* (Extrait par l'Auteur.)

Le but du Mémoire est l'étude géométrique des sytèmes de rayons rectilignes, étudiés par Hamilton dans sa *Theory of systems of rays* et dans les *Transactions of the Royal Irish Academy*, ainsi que par M. Kummer dans un Mémoire de 1860, *Journal de Crelle,* t. LVII. Dans les études plus récentes de Plücker, ces systèmes prennent le nom de *congruences*, et ils sont définis par deux relations entre les quatre constantes a, b, p et q qui déterminent une droite, constantes qu'on peut appeler les coordonnées d'une droite, si l'on considère la ligne droite comme un élément de l'espace. M. Mannheim introduit dans cette étude les surfaces gauches formées respectivement par une droite et des droites infiniment voisines. Toutes les propriétés dues à M. Kummer se démontrent alors aisément au moyen d'une figure plane, dans laquelle apparaissent toujours une ligne droite et un cercle.

« Le pinceau formé par les normales infiniment voisines d'une surface est très-intéressant à examiner. »

Une surface élémentaire de ce pinceau, surface que M. Man-

nheim a appelée *normalie*, donne lieu à une figure dans laquelle se trouvent groupés tous les éléments relatifs à la théorie des surfaces.

« On est ainsi amené, non-seulement à une nouvelle exposition de cette théorie, à de nombreux résultats dus à MM. Joachimsthal, Bertrand, Bonnet, Lamarle, Catalan, etc., mais encore à d'autres propriétés qui n'avaient pas encore été signalées dans les études si nombreuses faites à ce sujet. »

N° 21. Séance du 23 mai 1870.

M. D'ABBADIE. — *Note sur une nouvelle division décimale de l'angle et du temps.*

M. d'Abbadie propose, dans cette Note, la division décimale non pas pour le cercle entier, mais pour le quadrant. La *prime* ou première décimale équivaut alors à 9 degrés sexagésimaux. La deuxième décimale a déjà reçu le nom de *grade*. La quatrième ou *quarte* ($1^{\text{IV}} = 32'',4$) sera souvent en usage pour les petites mesures; les termes *quinte* ($0^q,00001$, ou $1^{\text{V}} = 3'',24$) ou cent millième partie du quadrant, et *sixte* ($0^q,000001$, ou $1^{\text{VI}} = 0'',324$) seraient plus rarement énoncés.

« La seule objection plausible, dit M. d'Abbadie, qu'on puisse adresser à cette réforme, c'est qu'un système de mesure adopté par la plupart des nations civilisées ne doit pas être changé. On répond que cette objection est inapplicable à tous les calculs de haute astronomie et à ceux de la géodésie, où l'étude des angles n'est point le but, mais bien l'intermédiaire, pour arriver à d'autres résultats, et surtout à la connaissance des dimensions réelles. Il en est de même dans les travaux de la physique. La mécanique céleste n'empruntant à l'observation qu'un nombre restreint de données, sur lesquelles sont fondées d'immenses séries de calculs, la conversion des valeurs d'un système dans l'autre n'est qu'un travail insignifiant, auprès des simplifications considérables que l'adoption de la division décimale du quadrant amènerait dans les calculs auxiliaires. Outre la facilité introduite dans les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication et de division des angles, on aura l'avantage d'éviter les réductions de degrés et de minutes en secondes, et *vice versa*, qui se présentent à chaque instant quand on fait usage de la division sexagésimale. »

M. JORDAN. — *Théorème sur les fonctions doublement périodiques.*

Soient $F_1, \ldots, F_n$ des fonctions doublement périodiques, n'ayant

chacune qu'un nombre limité d'infinis dans chaque parallélogramme des périodes; $l_1, l_2, \ldots, l_n$ des constantes. Si la fonction $\Phi = l_1 F_1 + \ldots + l_n F_n$ admet la période Ω, l'égalité

$$\Phi + l_1 F_1 + \ldots + l_n F_n$$

se décomposera, en général, en une suite d'égalités telles que

$$\begin{aligned} \Phi &= l_1 F_1 + \ldots + l_p F_p + \text{const.}, \\ l_{p+1} F_{p+1} &+ \ldots + l_q F_q = \text{const.}, \\ l_{q+1} F_{q+1} &+ \ldots + l_r F_r = \text{const.}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

où les fonctions $F_1, F_2, \ldots, F_p$ ont une période commune multiple de Ω, tandis que les fonctions qui figurent dans chacune des autres égalités ont deux périodes communes (multiples des moindres périodes de chacune d'elles), et, par suite, dépendent algébriquement les unes des autres.

N° 22. Séance du 30 mai 1870.

M. Combescure. — *Sur quelques formes différentielles.*

Dans cette Note, M. Combescure s'occupe de problèmes analogues au problème de l'*application* des surfaces les unes sur les autres, mais en considérant des formes à n indéterminées.

M. F. Lucas. — *Sur une formule d'analyse.*

MÉLANGES.

SUR L'INTÉGRALE $\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha \, dx}{1 - 2x\cos\alpha + x^2}$.

Par M. HERMITE.

Soit

$$f(\alpha) = \int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha \, dx}{1 - 2x\cos\alpha + x^2};$$

il est d'abord aisé de voir que l'on a

$$f(\alpha + \pi) = -f(\alpha);$$

car, en faisant, dans l'expression

$$f(\alpha+\pi)=-\int_{-1}^{+1}\frac{\sin\alpha\,dx}{1+2x\cos\alpha+x^2},$$

la substitution $x=-t$, nous obtiendrons sur le champ

$$f(\alpha+\pi)=-\int_{-1}^{+1}\frac{\sin\alpha\,dt}{1-2t\cos\alpha+t^2}=-f(\alpha).$$

La fonction $f(\alpha)$ est donc périodique, et il suffit, pour en obtenir la valeur générale, de la déterminer en supposant α compris entre zéro et π. Faisant à cet effet

$$x-\cos\alpha=u\sin\alpha,$$

ce qui donnera

$$\frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\frac{du}{1+u^2},$$

nous écrirons

$$\int_{-1}^{+1}\frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\int_0^{\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}\frac{du}{1+u^2}-\int_0^{\frac{-1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}\frac{du}{1+u^2},$$

de sorte que, dans le second membre, les deux intégrales représentent les arcs les plus petits, renfermés entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, ayant respectivement pour tangentes les quantités

$$\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\quad\text{et}\quad\frac{-1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{tang}\frac{\pi+\alpha}{2}.$$

Or, α étant moindre que π par hypothèse, la première intégrale sera par conséquent $\frac{\alpha}{2}$, mais la seconde aura pour valeur l'arc $\frac{\pi+\alpha}{2}$ diminué de π, c'est-à-dire $\frac{\alpha-\pi}{2}$; nous aurons donc

$$f(\alpha)=\int_{-1}^{+1}\frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\frac{\pi}{2}$$

entre les limites indiquées pour la variable α. Maintenant la relation

$$f(\alpha+\pi)=-f(\alpha)$$

donne cette conséquence, qu'entre les limites π et 2π, $f(\alpha)$ a pour

valeur $-\frac{\pi}{2}$, de sorte que nous nous trouvons amené à l'expression analytique, par une intégrale définie, d'une fonction *discontinue* égale à $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$, selon que la variable est renfermée entre $2n\pi$ et $(2n+1)\pi$, ou entre les limites $(2n-1)\pi$ et $2n\pi$, n étant un nombre quelconque.

On voit donc comment on peut être amené, par les considérations les plus élémentaires du calcul intégral à la considération si importante en analyse des fonctions discontinues, et j'ajoute que l'expression en série trigonométrique de cette fonction particulière qui s'est ainsi offerte se tire facilement de l'intégrale définie.

Il suffit, en effet, d'employer ce développement connu, savoir :

$$\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}=\sin\alpha+x\sin2\alpha+x^2\sin3\alpha+\ldots+x^{n-1}\sin n\alpha+\ldots,$$

et d'observer qu'on a

$$\int_{-1}^{+1}x^{n-1}\,dx=0 \quad \text{ou} \quad =\frac{2}{n},$$

suivant que n est pair ou impair, pour parvenir au résultat que donnerait la formule de Fourier, savoir :

$$f(\alpha)=\int_{-1}^{+1}\frac{\sin\alpha\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}=2\left[\sin\alpha+\frac{\sin3\alpha}{3}+\frac{\sin5\alpha}{5}+\ldots\right].$$

Il serait même possible d'établir la convergence de la série, en limitant le développement de la fonction $\frac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ à ses n premiers termes, et considérant le reste qu'on trouvera sous cette forme, savoir :

$$\mathrm{R}_n=\sin(n+1)\alpha\int_{-1}^{+1}\frac{x^n\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2}$$
$$-\sin n\alpha\int_{-1}^{+1}\frac{x^{n+1}\,dx}{1-2x\cos\alpha+x^2};$$

mais je ne m'y arrêterai point.

Une autre intégrale définie élémentaire conduit encore à la même

fonction discontinue, c'est celle-ci :

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}},$$

dont la valeur est $\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$ ou $-\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$, suivant que la constante a, qui, en valeur absolue, doit être supposée supérieure à l'unité, est positive ou négative. Il en résulte, si l'on fait $a = \frac{1}{\cos\alpha}$, qu'on a

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sin\alpha\, dx}{(1-x\cos\alpha)\sqrt{1-x^2}} = +\pi \quad \text{ou} \quad -\pi,$$

suivant que $\sin\alpha$ est positif ou négatif; mais cette expression ne diffère pas au fond de celle dont nous venons de nous occuper, elle s'y ramène en effet par la substitution $x = \frac{2z}{1+z^2}$, qui sert en général à l'intégration des radicaux de la forme $\sqrt{1-x^2}$. Sous une forme ou sous l'autre, le passage brusque de $f(\alpha)$ d'une valeur nulle à $+\frac{\pi}{2}$, ou $-\frac{\pi}{2}$, semble moins caché dans l'intégrale que dans la série trigonométrique; car, en supposant α infiniment petit, elles offrent, sous le signe d'intégration, aux infiniment petits près du second ordre, l'une le facteur $\frac{1}{(1-x)^2}$, l'autre le facteur $\frac{1}{(1-x)^{\frac{3}{2}}}$, qui, à la limite supérieure $x=1$, rendent les intégrales infinies; c'est du moins par l'intermédiaire de cette forme, du produit d'une quantité infiniment petite par une quantité infiniment grande, que se trouve réalisé le passage brusque d'une valeur nulle à une valeur finie.

Je remarque enfin qu'on a

$$f'(\alpha) = \int_{-1}^{+1} \frac{\cos\alpha(1+x^2)-2x}{(1-2x\cos\alpha+x^2)^2}\,dx = \int_{-1}^{+1} d\left(\frac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}\right),$$

et l'intégrale est nulle, en général, puisque la fonction $\frac{1-x\cos\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ prend la même valeur aux deux limites; toutefois, pour $\cos\alpha = \pm 1$, elle est infinie, l'expression à intégrer entre les limites $+1$ et -1 étant $\frac{1}{1\pm x}$.

NOTICE SUR LA VIE ET LES TRAVAUX DE N.-I. LOBATCHEFSKY.

Deuxième article (*).

Nous allons donner la liste des écrits publiés par Lobatchefsky sur diverses branches des sciences mathématiques. Nous indiquerons, pour n'y plus revenir, le contenu de ceux de ces écrits que nous avons à notre disposition, à l'exception de ceux qui se rapportent aux découvertes géométriques de Lobatchefsky, et dont nous nous proposons d'exposer l'ensemble avec plus de développement.

1. О резонансѣ или взаимномъ колебаніи воздушныхъ столбовъ. (*Каз. Вѣстникъ*, 1828 г.) — De la résonnance, ou des vibrations réciproques des colonnes gazeuses. (*Courrier de Kazan*, 1828.)

2. О началахъ Геометріи. (*Каз. Вѣстникъ*, 1828 и 1829 г.) — Sur les principes de la Géométrie. (*Courrier de Kazan*, 1828 et 1829.)

Ce Mémoire, qui contient un abrégé des travaux de Lobatchefsky sur la Géométrie, a été réimprimé récemment (67 p. in-4°). Nous aurons l'occasion d'y revenir.

3. Рѣчь о важнѣйшихъ предметахъ воспитанія, произнесенная 5 іюля 1828 года въ торжественномъ собраніи университета. (*Каз. Вѣстникъ*, 1832 г.) — Discours sur les matières les plus importantes de l'éducation, prononcé le $\frac{5}{17}$ juillet 1828, dans la séance solennelle de l'Université. (*Courrier de Kazan*, 1832.)

4. Алгебра или вычисленіе конечныхъ. Сочинилъ Н. Лобачевскій. Казань. Въ университетской типографіи. 1834. — Algèbre, ou Calcul des quantités finies. Par N. Lobatchefsky. Kazan. Typographie universitaire. 1834. — 1 volume in 8°, 530 pages.

Ce Traité est le seul ouvrage séparé que Lobatchefsky ait composé. Les préliminaires et les opérations fondamentales de l'Algèbre sont développés, un peu longuement peut-être, dans les cinq premiers Chapitres (p. 8-80). Les deux Chapitres suivants (p. 81-120) sont consacrés aux fractions algébriques et aux fractions décimales. Le Chapitre VIII traite des fractions continues (p. 121-150). Dans le Chapitre IX (p. 151-187), l'auteur expose la résolution des équations déterminées du premier degré à plusieurs inconnues. Il donne,

(*) Voir *Bulletin*, p. 66.

d'après Cauchy, les expressions symboliques, sous forme de produits, des deux termes de la valeur de chaque inconnue. L'objet du Chapitre X (p. 188-234) est la résolution en nombres entiers des équations indéterminées, avec diverses applications au calendrier, aux formules pascales de Gauss, etc. Chapitre XI (p. 235-284) : Puissances et racines des quantités réelles. Chapitre XII (284-305) : Puissances et racines des quantités imaginaires. Chapitre XIII (p. 305-332) : Des logarithmes. Séries logarithmiques et exponentielles. Chapitre XIV (p. 332-344) : Des fonctions trigonométriques, définies au moyen des exponentielles imaginaires ; leurs développements en séries. Fonctions circulaires inverses. Chapitre XV (p. 345-373) : Calcul direct et inverse des différences. Applications diverses. Chapitre XVI (p. 374-411) : Résolution des équations binômes. Congruences. Division du cercle, d'après Gauss. Chapitre XVII (p. 411-528) : Résolution d'une équation algébrique quelconque. Équations du second degré. Racines commensurables. Équations du troisième et du quatrième degré. Propriétés générales des équations algébriques. Règle de Descartes. Développement des racines en fractions continues par la méthode de Lagrange.

5. Пониженіе степени въ двучленномъ уравненіи, когда показатель безъ единицы дѣлится на 8. (*Ученыя Записки Императорскаго Казанскаго Университета.* 1834 г.) — Abaissement du degré d'une équation binôme, lorsque l'exposant moins l'unité est divisible par 8 (*Mémoires de l'Université impériale de Kazan,* 1834). In-8°, 32 pages.

Ce Mémoire est le premier de la collection des Ученыя Записки. Lobatchefsky rappelle qu'en 1813 il présenta à la Faculté des Sciences physico-mathématiques un travail, resté inédit, où il établissait que la résolution des équations binômes peut se faire entièrement à l'aide d'extractions de racines. Il y donnait l'expression générale de l'abaissement du degré de l'équation, lorsque l'exposant est de la forme $4n+1$. Cette méthode a été reproduite dans le Chapitre XVI de son *Algèbre*. Depuis, en lisant dans le *Journal de Crelle* (t. IX, 1 p. 12, 1832) un Mémoire de Richelot sur la résolution de l'équation $x^{257}=1$, il y a appris que Legendre, dans la troisième édition de sa *Théorie des nombres*, a trouvé la même expression générale, et a dû parvenir à la même solution du problème. Richelot,

dans son Mémoire, ne semble pas espérer que l'abaissement puisse être poussé au-delà de $\frac{1}{4}(n-1)$. Mais le même volume du *Journal de Crelle* contient des travaux de Libri où ce géomètre insiste sur la liaison intime qui existe entre les progrès de l'Analyse et ceux de la Théorie des nombres. Encouragé par ces considérations, malgré les doutes de Richelot, Lobatchefsky a repris ses recherches sur l'expression générale de l'abaissement de l'équation $x^n = 1$, et il est parvenu à pousser cet abaissement jusqu'au degré $\frac{1}{8}(n-1)$, lorsque $n-1$ est divisible par 8. Il en fait l'application aux valeurs de $n = 73, 89, 257$.

6. Объ изчезаніи тригонометрическихъ строкъ. (*Уг. Зап. Каз. ун.* 1834 г. книга II.) — Sur la convergence des séries trigonométriques. (*Mém. de l'Un. de Kazan*, 1834, 2e cahier.)

7. Условныя уравненія для движенія и положенія главныхъ осей въ твердой системѣ. Équations de condition pour le mouvement et la position des axes principaux dans un système solide. [Envoyé aux *Mémoires scientifiques* (Ученыя Записки) de l'Université de Moscou.]

8. *Géométrie imaginaire,* par N. Lobatchefsky, recteur de l'Université de Kazan. (*Journal de Crelle,* t. XVII, 1837.) — In-4°, 26 p., 1 pl.

9. Воображаемая Геометрія. (*Уг. Зап. Каз. ун.* 1835 г., кн. I.) — Géométrie imaginaire. (*Mém. de l'Un. de Kazan*, 1835, 1er cah.) Ce Mémoire est une rédaction plus développée du Mémoire précédent, dont le manuscrit avait déjà été envoyé au *Journal de Crelle,* et qui ne fut imprimé que deux ans plus tard. Nous nous en occuperons dans un prochain article.

10. Способъ увѣряться въ изчезаніи безконечныхъ строкъ и приближаться къ значенію функцій отъ весьма большихъ чиселъ. (*Уг. Зап. Каз. ун.* 1835 г., кн. II.) — Méthode pour reconnaître la convergence des séries infinies, et pour obtenir approximativement la valeur des fonctions de très-grands nombres. (*Mém. de l'Un. de Kazan.* 1835, 2e cah.)

11. Новыя начала Геометріи съ полной теоріей параллельныхъ. (*Уг. Зап. Каз. ун.* 1835 г., кн. III; 1836 г., книги II и III; 1837 г.,

кн. I; 1838 г., кн. I.) — Nouveaux principes de Géométrie, avec une théorie complète des parallèles. (*Mém. de l'Un. de Kazan*, 1835, cah. I; 1836, cah. II et III; 1837, cah. I; 1838, cah. I.) — In-8°, 470 p., 9 pl.

Cette importante suite de Mémoires renferme l'exposition détaillée du système géométrique de Lobatchefsky, avec un Traité complet de Trigonométrie et la Théorie des approximations dans les calculs numériques.

12. Примѣненіе воображаемая Геометріи къ нѣкоторымъ интеграламъ. (*Уч. Зап. Каз. ун.* 1836 г., кн. I.) — Application de la Géométrie imaginaire à quelques intégrales. (*Mém. de l'Un. de Kazan.* 1836, cah. I.) — In-8°, 164 p.

Ce Mémoire fait suite aux Mémoires 8 et 9.

13. *Sur la probabilité des résultats moyens, tirés des observations répétées;* par M. Lobatchefsky, recteur de l'Université de Kazan. (Envoyé en 1838 au *Journal de Crelle;* inséré en 1842 dans le t. XXIV de ce Journal.) — In-4°, 7 p.

Au moyen des formules de l'Analyse combinatoire, Lobatchefsky détermine les limites des probabilités relatives à un nombre fini d'observations, tandis que Laplace avait exprimé ces mêmes limites par des intégrales, dans la supposition d'un nombre d'observations très-grand.

14. *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Von* Nicolaus Lobatschewsky, *Kaiserl. russ. wirkl. Staatsrathe und ord. Prof. der Mathematik bei der Universität Kasan. Berlin*, 1840. *In der Fincke'schen Buchhandlung.* — Études géométriques sur la Théorie des Parallèles. Par N. Lobatchefsky, conseiller d'État actuel de l'Empire russe, et Professeur ordinaire de Mathématiques à l'Université de Kazan. Berlin, 1840. — In-12, 61 p., 1 pl.

Cette brochure semble être une reproduction d'un Mémoire envoyé en 1840 au *Journal de Crelle,* sous le titre de *Beiträge zu der Theorie der Parallellinien,* et non inséré. C'est un résumé de la partie élémentaire du n° 11.

15. *Ueber die Convergenz der unendlichen Reihen, von Nicol. Lobatschewsky, ord. Prof. der Mathematik an der Universität Kasan.* — Sur la convergence des séries infinies. Par N. Lobatchefsky, etc. — Gr. in-4°, 48 p.

Mémoire envoyé au *Journal de Crelle* en 1840, et non inséré. Imprimé à Kazan en 1841. La convergence des séries est définie par la condition que la somme de p termes, pris à la suite du $r^{ième}$, soit infiniment petite pour r infini, quel que soit p, indépendant de r. Application aux séries les plus importantes, pour des valeurs soit réelles, soit imaginaires, des variables. Développements en séries trigonométriques. Développement des fonctions trigonométriques en produits infinis, et de leurs logarithmes en séries infinies. Calcul des fonctions de très-grands nombres. Détermination de quelques intégrales définies.

16. Полное затмѣніе солнца въ Пензѣ въ 1842 г. 20 іюня. (*Журналъ мин. народн. просв.* 1843 г.) — L'éclipse totale de Soleil à Penza, le $\frac{20 \text{ juin}}{2 \text{ juillet}}$ 1842. (*Journal du Ministère de l'Instruction publique,* 1843.)

17. О значеніи нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ. (*Уч. Зап. Каз. ун.* 1852 г.) — Sur la valeur de quelques intégrales définies. (*Mém. de l'Un. de Kazan,* 1852.)

18. *Pangéométrie, ou Précis de Géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des Parallèles.* Par N. Lobatchefsky, professeur émérite de l'Université de Kazan, et membre honoraire de l'Université de Moscou. (Сборникъ ученыхъ статей, написанныхъ профессорами Императорскаго Казанскаго Университета, въ память пятидесятилѣтняго его существованія. *Томъ первый.* Казань, 1856. — Recueil de Mémoires scientifiques, écrits par les professeurs de l'Université impériale de Kazan, en commémoration du cinquantième anniversaire de sa fondation. Kazan, 1856.) — Gr. in-8°, 67 p.

C'est le dernier travail de Lobatchefsky, et l'un des plus remarquables par la clarté de la rédaction. Une traduction italienne en a été donnée par M. Battaglini (*Giornale di Matematiche,* t. V, 1867, p. 273-336) (*).

J. H.

(*) Il en a été fait des tirages à part. Prix : 3 fr. 50 c.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

SANNIA (Achille), professore nella R. Scuola di Applicazione per gl' Ingegneri di Napoli, e d'OVIDIO (Enrico), professore nel R. Liceo Principe Umberto di Napoli. — Elementi di Geometria. Seconda edizione, riveduta e corretta. — Napoli, Tipografia di Angelo Trani; 1871 (*).

La publication de cet Ouvrage remarquable comble une lacune regrettable qui existait encore dans la série des ouvrages destinés à l'enseignement élémentaire. L'Italie possédait déjà une traduction des *Éléments de Mathématiques* (**) de M. Baltzer, due aux soins d'un géomètre éminent. Mais l'extrême concision de cet auteur en rend la lecture difficile à ceux qui sont privés du secours d'un maître. D'autre part, les nouveaux règlements de l'Instruction publique en Italie exigent que l'enseignement de la Géométrie soit dirigé d'après les *Éléments d'Euclide*, dont M. Baltzer n'a nullement cherché à suivre la marche. Il fallait donc un Traité qui se rapprochât de celui d'Euclide autant que le permettaient les progrès de la science moderne, et qui en rendît l'étude plus facile, en y ajoutant des compléments indispensables.

Tel a été le but des auteurs du livre que nous signalons à l'attention de nos lecteurs, et nous pensons qu'ils l'ont entièrement atteint. Partout ils ont conservé dans toute sa pureté la rigueur euclidienne, à laquelle la plupart des ouvrages modernes sur le même sujet ne nous ont guère accoutumés. Tout ce qui touche aux principes fondamentaux a été traité avec un soin et des détails qui ne peuvent laisser aucun nuage dans l'esprit des commençants. Sans sortir du cadre élémentaire, les auteurs l'ont complétement rempli, et n'ont négligé d'indiquer aucune des théories qui font la base des parties plus élevées de la Géométrie.

Si nous avons quelques critiques à faire sur la rédaction de cet

---

(*) A. Sannia, professeur à l'École royale d'Application pour les ingénieurs de Naples, et H. d'Ovidio, professeur au Lycée du Prince Humbert de Naples. — *Éléments de Géométrie*. 2e édition revue et corrigée. — Naples, imprimerie de A. Trani; 1871. 1 vol. in-8°, x-571 pages, avec 383 figures dans le texte. Prix : 5 francs.

(**) Voir *Bulletin*, p. 80.

ouvrage, ce sera seulement en nous plaçant au point de vue de l'enseignement. Il nous semble qu'il y aurait eu un immense avantage à renoncer aux divisions artificielles, qui séparent l'étude du cercle de celle des triangles, l'étude de la sphère de celle des angles dièdres et polyèdres. Le rapprochement immédiat de propositions identiques pour le fond et différentes seulement par la forme est doublement utile, en évitant la répétition de démonstrations équivalentes, et en faisant pénétrer plus profondément dans la connaissance des objets qu'on étudie. Les auteurs auraient pu, en cela, rester fidèles à l'exemple d'Euclide, qui, dès sa première proposition, fait usage du cercle.

D'autre part, nous regrettons que le désir de se conformer au programme imposé ait conduit MM. Sannia et d'Ovidio à suivre leur modèle de trop près dans leur théorie des proportions. Bien que nous considérions la lecture de l'admirable cinquième livre d'Euclide comme un des exercices les plus profitables pour habituer l'esprit à la sévère logique, nous croyons cependant que les méthodes modernes, fondées sur le principe des limites, conduisent au même but par une voie beaucoup plus prompte et plus aisée, et peuvent le disputer en rigueur aux méthodes des Anciens.

L'ouvrage est divisé en deux parties, comprenant l'une la Planimétrie, l'autre la Stéréométrie. Chacune de ces parties se compose de quatre livres.

Le premier livre traite de la ligne droite; le second, du cercle; le troisième, des lignes proportionnelles et de la similitude dans le plan; le quatrième, de la mesure des aires et des arcs de cercle; le cinquième, du plan et de la ligne droite, du prisme et de la pyramide; le sixième, du cylindre et du cône de révolution, de la sphère et de la symétrie; le septième, de la similitude dans l'espace; le huitième, de la mesure des volumes et des surfaces des polyèdres et des corps ronds.

Nous terminons cette analyse en faisant des vœux pour que cet excellent livre s'introduise dans nos écoles et contribue à réformer chez nous l'enseignement si défectueux de la Géométrie élémentaire.

J. H.

SPITZ (Dr Carl), Professor am Polytechnikum zu Carlsruhe. — ERSTER CURSUS DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG, nebst einer Sammlung von 1450 Beispielen und Uebungsaufgaben, zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und beim Selbststudium. — Leipzig und Heidelberg, C.-F. Winter'sche Verlagshandlung. 1871 (*).

Le plan de ce livre est à peu près celui de tous les Traités modernes. La méthode est celle que l'on désigne sous le nom de *méthode des limites,* et qui ne diffère de la méthode infinitésimale que par l'excessive timidité de la forme. Mais ce qui le rend précieux, c'est le grand nombre d'exercices qu'il renferme à la suite de chaque paragraphe, outre le recueil de problèmes variés qui termine le volume.

La première partie traite du Calcul différentiel et de ses applications à la théorie des courbes planes. La seconde partie contient les éléments du calcul intégral, restreint aux fonctions explicites, avec les séries de Bürmann et de Lagrange, et les applications à la sommation des séries et aux problèmes de quadratures, de rectifications, de cubatures au moyen des intégrales simples. J. H.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

GIORNALE DI MATEMATICHE. 8e année. Juillet-décembre 1870 (**).

TOGNOLI (O.). — *Sur une extension de propriétés relatives à des courbes algébriques planes d'ordre quelconque, aux surfaces algébriques de degré quelconque.* (Suite et fin, 7 p.)

Les articles contenus dans cette partie du Mémoire ont pour titres : 1° De la pampolaire d'un faisceau et d'un réseau de surfaces; 2° Cordes tangentes; 3° Plans tangents en des points conjugués; 4° Points doubles d'un réseau et d'un faisceau de polaires internes.

(*) SPITZ (Dr C.), professeur à l'Institut Polytechnique de Carlsruhe. — *Premières Leçons de Calcul différentiel et intégral, avec un recueil de* 1450 *exemples et exercices,* à l'usage des écoles supérieures et des personnes qui étudient seules. — Leipzig et Heidelberg, Winter, 1871. 1 vol. in-8°, 629 p. Prix : $3\frac{1}{2}$ Thlr.

(**) Voir *Bulletin*, p. 152.

Cassani (P.). — *Sur le triangle conjugué de deux coniques.* (2 p.)

Détermination de ce triangle, en cherchant les points qui ont la même droite polaire par rapport à deux coniques.

Cassani (P.). — *Solution de la question n° 178 des* Nouvelles Annales. (2 p.)

Par un point donné, mener un cercle deux fois tangent à une parabole donnée.

Orlando (D.). — *Démonstration de quelques théorèmes de Géométrie.* (2 p.)

Del Grosso (R.). — *Mémoire sur l'attraction des sphéroïdes.* (Suite et fin, 2 art., 49 p.)

Avec la suite du Chapitre VIII sur l'attraction des couches de niveau, se termine la Première Partie du Mémoire. La Seconde Partie traite de l'attraction d'une masse de densité variable, limitée par une surface peu différente de la sphère, et contient les Chapitres suivants: *Chap.* I. Développement en série de la valeur inverse de la distance de deux points. — *Chap.* II. Fonctions sphériques et leur propriétés principales. — *Chap.* III. Potentiel d'une couche sphérique de densité variable. — *Chap.* IV. Attraction d'un sphéroïde peu différent de la sphère.

Regis (D.). — *Sur une application des principes d'homologie à la perspective.* (4 p.)

Regis (D.). — *Sur le nombre des racines réelles que peut avoir l'équation* $x^m - px + q = 0$. (2 p.)

La démonstration est fondée sur la représentation géométrique des équations $y = x^m + q$ et $y = px$, x et y étant les coordonnées orthogonales d'un point.

Aschieri (F.). — *Sur un complexe du second degré. — Génération géométrique des complexes du premier degré.* (6 p.)

Quelques propriétés des complexes du second degré dont l'équation peut se réduire à contenir seulement les carrés des coordonnées de la ligne droite. Ces propriétés consistent en des relations harmoniques que les droites du complexe déterminent avec une série de surfaces du second degré conjuguées au tétraèdre fondamental. Quant à la génération géométrique des complexes du premier degré, l'au-

teur trouve le théorème suivant : « Par tout quadrilatère gauche, » formé avec quatre droites d'un complexe linéaire, est déterminée » une dépendance homographique, par laquelle le complexe est le » lieu des droites qui rencontrent suivant des systèmes de points en » involution deux faisceaux projectifs de plans, ayant pour axes un » couple de côtés opposés du quadrilatère. »

Jung (G.). — *Démonstration d'un théorème de Géométrie.* (6 p.)

D'Ovidio (E.). — *Note sur les points, plans et droites en coordonnées homogènes.* (44 p.)

Riche recueil de relations métriques très-générales, relatives aux angles entre les droites ou les plans, aux distances entre les points, aux aires des triangles, aux volumes des tétraèdres, aux moments géométriques.

Bitonti (V.-N.). — *Solution de quelques questions de Trigonométrie et de Géométrie, proposées dans l'*Educational Times. (5 p.)

Padova (E.). — *Sur deux théorèmes de M. Neumann.* (6 p.)

Démonstration de deux théorèmes relatifs à la théorie du potentiel, énoncés par M. Neumann dans le tome II des *Mathematische Annalen*, et extension de ces théorèmes à l'espace à n dimensions.

Janni (G.). — *Exposition de la Nouvelle Géométrie de Plücker.* (25 p.)

Reproduction du Mémoire de Plücker sur les fondements de la Nouvelle Géométrie de l'espace, contenant principalement les propriétés des complexes, des congruences et des configurations linéaires.

Padova (E.). — *Du mouvement d'un ellipsoïde dans un fluide incompressible et indéfini.* (6 p.)

L'auteur, suivant la méthode employée par Riemann pour traiter le problème de la détermination du mouvement d'un corps homogène dans un fluide indéfini et incompressible, quand les forces qui sollicitent les divers points du corps sont égales entre elles en direction et en intensité, et pour appliquer la solution générale de ce problème au cas où le corps mobile est une sphère, traite le cas où le corps mobile est un ellipsoïde à trois axes.

Mollame (V.). — *Solution de quelques questions de Géométrie, proposées dans l'*Educational Times. (4 p.)

Bitonti (V.-N.). — *Solution d'une question tirée du même recueil.* (3 p.)

Cassani (P.). — *Note sur la conique des neuf points et des neuf droites.* (3 p.)

L'équation de la conique est donnée sous la forme d'un déterminant jacobien. G. B.

COMPTES RENDUS hebdomadaires des séances de l'Académie Sciences, publiés par MM. les Secrétaires perpétuels (*).

T. LXX.

N° 23. Séance du 6 juin 1870.

P. Secchi. — *Sur le déplacement des raies observées dans le spectre solaire.*

M. Mannheim. — *Détermination du plan osculateur et du rayon de courbure de la trajectoire d'un point quelconque d'une droite que l'on déplace en l'assujettissant à certaines conditions.*

Si l'on considère le déplacement d'une droite dans l'espace, on peut se proposer de déterminer, pour la trajectoire d'un de ses points : 1° la tangente à cette trajectoire ; 2° le plan osculateur ; 3° le rayon de courbure. En faisant usage de la notion si importante de la droite conjuguée due à M. Chasles, M. Mannheim a donné la solution complète de la première question dans son *Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable* (**).

Pour les deux autres questions qui n'ont pas encore été traitées, M. Mannheim est conduit à introduire une nouvelle droite, qu'il propose d'appeler *deuxième conjuguée*, et qui permet d'obtenir, de la manière la plus simple, tous les éléments géométriques du second ordre.

M. C. Wolf. — *Observations relatives à la division décimale des angles et du temps, proposée par M. d'Abbadie.*

« Tout en appréciant les raisons que M. d'Abbadie vient de déve-

---

(*) Voir *Bulletin*, p. 316.

(**) *Mémoires des Savants étrangers*, t. XX, et *Journal de l'École Polytechnique*, 43e cahier.

lopper, pour la division décimale correspondante des angles et du temps, il me semble, dit M. Wolf, qu'on obtiendrait les mêmes avantages, d'une manière plus simple et même plus rationnelle, en appliquant la division décimale au cercle et au jour, et non pas au quart du cercle et au quart du jour. Dans le cercle et dans le jour, nous possédons des unités données par la nature; en prendre le quart pour une nouvelle unité, c'est introduire tout d'abord quelque chose d'arbitraire. Outre cela, la division décimale du jour est déjà en usage dans maints calculs astronomiques, tandis que, vraisemblablement, les Astronomes ne se prêteraient pas très-facilement à adopter le quart du jour en unité. »

M. d'Abbadie répond en ces termes :

« Le quart du cercle est l'unité naturelle, employée de tout temps pour les fonctions trigonométriques; je n'ai pas proposé de changer cette unité, mais bien de la diviser décimalement, en revenant aux idées si justes de Lagrange, Laplace, Ideler, Borda, etc. Les analystes ont toujours rapporté les fonctions de l'angle au quadrant et non au cercle entier. Si le jour tout entier était divisé en 10 ou en 100, on ne pourrait, sans une multiplication préalable, prendre le sinus, etc., d'un angle horaire, ainsi que le besoin s'en fait sentir continuellement. On a bien plus rarement la nécessité de diviser la circonférence par 10; mais, dans ce cas, il suffirait de diviser par 4 le fractionnement décimal proposé par Lagrange, et appliqué au temps, en prenant comme unité l'intervalle de six heures. J'ai peine à comprendre ce qu'il y a d'arbitraire dans le quart du cercle pris comme unité. »

Il nous semble que, en définitive, dans cette discussion, tout le monde a raison. S'il n'y avait que le temps à compter, le jour serait l'unité la plus naturelle; on ne peut méconnaître, d'autre part, que le quadrant ne soit l'unité désignée pour les angles. Si l'on veut, comme cela serait très-utile, faire concorder les deux divisions, il faut de toute nécessité sacrifier une des deux unités naturelles, mais nous ne pouvons admettre, avec M. Wolf, que le cercle entier soit l'unité naturelle des angles.

MM. Klein et Lie. — *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces.*

Dans cette Note se trouvent rapidement résumés les résultats

d'une étude neuve et importante, entreprise par les deux jeunes géomètres de Gœttingue et de Christiania.

Ces deux savants se sont proposés la question suivante : Trouver toutes les courbes et toutes les surfaces qui se transforment en elles-mêmes par une infinité de transformations linéaires ou homographiques, permettant d'amener, en général, chaque point de la courbe en tout autre point.

Parmi ces transformations, il y en a qui amènent tous les points dans des positions infiniment voisines. On est ainsi conduit à un système d'équations différentielles dont on obtient l'intégrale la plus générale.

Les courbes, résultat de cette intégration, et définies par la propriété que nous venons d'indiquer, sont appelées, pour abréger, des *courbes* V. On remarque parmi elles les paraboles, la spirale logarithmique, les courbes gauches du quatrième ordre avec rebroussement, les transformées linéaires de la loxodromie sur la sphère.

Quant aux surfaces V, elles comprennent toutes celles qui sont les transformées homographiques des surfaces comprises dans l'équation

$$x^a y^b z^c = \text{const.},$$

etc., etc.

La Note se termine par l'énoncé d'une proposition très-générale, relative à ces courbes et à ces surfaces.

N° 24. Séance du 13 juin 1870.

M. Yvon Villarceau. — *Remarques relatives à la division décimale des angles et du temps.*

M. Villarceau pense avec M. Wolf que l'unité naturelle des angles est le *cercle* ou le *tour*. Il croit qu'il y aurait avantage à adopter cette unité d'angle à la place du *quadrant*, dont le nom même rappelle qu'il ne peut être une unité.

M. Le Besgue. — *Démonstration de la méthode de Jacobi pour la formation de la période d'une racine primitive.*

Cette démonstration très-intéressante n'est malheureusement pas de nature à être analysée.

M. Combes. — *Note accompagnant la présentation de l'*Introduction à la Mécanique industrielle de Poncelet.

On sait que cet ouvrage de Poncelet a été publié en 1829; il était

destiné à compléter les leçons que Poncelet professait, à cette époque, aux ouvriers de la ville de Metz. La deuxième édition, plus complète, fut mise à l'impression vers 1830; elle ne fut publiée qu'en 1839.

La nouvelle édition est augmentée de Notes dues à la plume de M. Kretz, et dans lesquelles sont exposées les notions essentielles sur la Théorie mécanique de la chaleur. Voici comment s'exprime M. Combes au sujet de cet ouvrage de Poncelet :

« L'*Introduction à la Mécanique industrielle* est une des œuvres les plus achevées de Poncelet. Elle porte l'empreinte de ce génie sagace, laborieux, patient, difficile pour lui-même, qui voulait et savait creuser son sujet jusqu'au fond. Quoiqu'elle sorte du cercle des sciences abstraites, elle a gardé et conservera dans l'avenir toute son utilité et sa valeur scientifique; elle restera un modèle des Traités de Mécanique appliquée, et ne contribuera pas moins que les travaux qui l'ont précédée à la gloire de notre confrère. »

M. A. Mannheim. — *Construction de l'axe de courbure de la surface développable enveloppe d'un plan dont le déplacement est assujetti à certaines conditions.*

Dans cette nouvelle Communication, M. Mannheim considère la figure invariable formée par un système de plans parallèles à une même droite, et il établit la liaison qui existe entre les courbures des surfaces développables que ces plans enveloppent pendant leur déplacement.

Pour la développable enveloppe d'un plan, M. Mannheim emploie la droite d'intersection de deux plans normaux infiniment voisins menés par deux génératrices voisines de la surface, et il appelle cette droite *axe de courbure*. En employant les théorèmes relatifs au déplacement d'un solide invariable démontrés dans ses études précédentes, l'auteur est conduit à la solution du problème suivant :

« Quatre plans parallèles à une même droite G forment une figure de grandeur invariable se déplaçant en touchant respectivement quatre surfaces données; construire, à un instant quelconque, l'axe de courbure de la développable enveloppe d'un plan invariablement lié aux premiers, et qui est aussi parallèle à G. »

M. Norman-Lockyer. — *Observations spectroscopiques du Soleil.*

M. Winnecke. — *Éphéméride de la nouvelle comète observée.*

MM. Klein et Lie. — *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces.*

Dans cette Note, MM. Klein et Lie complètent la Communication faite par eux dans la séance du 6 juin, en ajoutant un grand nombre de théorèmes importants à ceux qu'ils ont déjà donnés.

M. J. Boussinesq. — *Essai sur la théorie de l'écoulement d'un liquide par un orifice en mince paroi* (suite).

(*Voir* la séance du 31 janvier, *Bulletin*, p. 32.)

M. Clausius. — *Sur une quantité analogue au potentiel et sur un théorème y relatif.*

Dans cette Note, M. Clausius établit le théorème suivant de Mécanique : Soit donné un système de points matériels m, m', m'',... de coordonnées x, y, z; x', y', z';..., qui sont soumis à des forces dont les composantes sont X, Y, Z; X',.... Formons la somme

$$\sum \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right],$$

ou, en désignant par v, v', v'',.. les vitesses des points, la somme $\sum \frac{mv^2}{2}$, appelée *force vive du système*, et formons de plus la somme

$$\Sigma = \tfrac{1}{2}(\mathrm{X}x + \mathrm{Y}y + \mathrm{Z}z),$$

dont M. Clausius appelle la valeur moyenne le *viriel du système*. On peut énoncer le théorème suivant :

La force vive moyenne du système est égale à son viriel.

M. Maurice Levy. — *Mémoire sur les équations générales des mouvements ultérieurs des corps solides ductiles au delà des limites où l'élasticité pourrait les ramener à leur premier état.* Mémoire présenté. (Extrait.)

Dans ce Mémoire se trouvent établies pour des mouvements quelconques dans l'espace, et aussi pour ceux du cas important où tout est symétrique autour d'un axe, les équations générales de ces mouvements de déformation des masses ductiles, qui avaient été données par M. de Saint-Venant, dans une Note du 7 mars 1870, pour le seul cas de mouvements tous semblables dans des plans parallèles, où l'on peut abstraire la dimension qui leur est perpendiculaire, et ne considérer que deux des trois coordonnées des points.

M. G. Darboux. — *Sur la surface des centres de courbure d'une surface algébrique.*

Dans cette Note se trouvent déterminés l'ordre, la classe, et quelques-unes des singularités de la surface des centres de courbure. Il faut indiquer que déjà, dans un Mémoire sur les caractéristiques des systèmes de surfaces du second ordre, inséré aux *Nouvelles Annales de Mathématiques* (t. VII, 2ᵉ série), M. Zeuthen avait résolu quelques-unes des questions traitées par M. Darboux.

N° 26. Séance du 27 juin 1870.

M. Hoüel. — *Sur le choix de l'unité angulaire.*

Cette Note se rapporte à la discussion dont nous avons déjà parlé plus haut; elle nous paraît concluante.

M. Yvon Villarceau. — *Observations relatives à l'objet de la Communication qui précède.*

M. Hoppe. — *Corollaire au théorème de M. Crofton.*

Cette Note se rapporte à un théorème dont nous avons déjà parlé et qui a été donné dans les *Comptes rendus* (t. LXV, p. 994). M. Hoppe fait au sujet de ce théorème et de la démonstration qui en a été donnée par M. Serret une remarque ingénieuse. L'expression de l'intégrale étendue à l'aire se compose de trois parties, l'une algébrique, l'autre circulaire et enfin la dernière est le produit d'un logarithme par la surface d'un polygone. Or on sait que ces trois formes sont irréductibles l'une à l'autre. Alors en séparant ces trois espèces de termes, le théorème de M. Crofton se décompose en trois autres.

M. F. Lucas. — *Nouvelles propriétés de la fonction potentielle.*

Cette Note traite surtout des propriétés du potentiel dans un système d'atomes. Nous rendrons compte du travail *in extenso* publié dans le journal de M. Liouville.

M. Martin de Brettes. — *Détermination de l'épaisseur du blindage en fer que peut traverser un projectile dont on connaît le poids, le calibre et la vitesse d'arrivée.*

T. LXXI.

N° 1. Séance du 4 juillet 1870.

M. Delaunay. — *Note sur les pyramides de Villejuif et de Juvisy*

M. Serret. — *Rapport sur un Mémoire de M. Bouquet, relatif à la théorie des intégrales ultra-elliptiques.*

« Le Mémoire de M. Bouquet dont l'Académie nous à chargés de lui rendre compte se rapporte au célèbre théorème d'Abel sur les transcendantes ultra-elliptiques, et il a exclusivement pour objet la démonstration d'un théorème nouveau qui peut être regardé comme un complément de celui d'Abel, au moins en ce qui concerne le cas le plus simple des transcendantes de *première espèce* d'une *classe* quelconque. Ce cas est le seul que l'auteur ait developpé, mais l'analyse dont il a fait usage est assurément susceptible d'extension.

» Dans le cas dont il s'agit, le théorème d'Abel assigne une valeur constante à une certaine somme d'intégrales du même élément différentiel, prises avec des signes convenables ; on peut supposer que les limites inférieures de ces intégrales soient zéro, et les limites supérieures sont des variables liées entre elles par des équations algébriques.

» C'est l'étude de la *constante* du théorème d'Abel que M. Bouquet a entreprise, et cet habile géomètre est parvenu à démontrer qu'on en obtient la valeur en ajoutant entre eux un certain nombre d'*éléments fixes*, après les avoir multipliés par des nombres entiers, qui peuvent être positifs, nuls ou négatifs. Les éléments dont je parle sont des intégrales définies qui répondent au même élément différentiel que celles à la limite supérieure variable auxquelles se rapporte le théorème d'Abel ; elles sont prises, comme celles-ci, à partir de zéro, et leurs limites supérieures sont les valeurs de la variable pour lesquelles l'élément différentiel devient infini.

» La démonstration que M. Bouquet a donnée de son théorème est remarquable par sa simplicité. Prenant pour point de départ des résultats importants dus à ses devanciers et particulièrement à M. Puiseux, l'auteur a su mettre habilement à profit la considération, reconnue aujourd'hui indispensable, de l'intégration exécutée suivant des contours quelconques.

» Le résultat obtenu par M. Bouquet remplit un *desideratum* signalé à plusieurs reprises par Legendre. L'illustre fondateur de la théorie des fonctions elliptiques a développé dans le tome III de son ouvrage (3me supplément) un grand nombre d'applications du théorème d'Abel, et il s'est occupé, à l'égard de quelques transcendantes particulières, de la détermination de la constante. « Cette question,

» dit-il, dont il ne paraît pas qu'on puisse donner la solution *a priori* » et d'une manière générale, mérite de fixer l'attention des analystes » par les résultats très-peu variés et très-simples qu'on obtient cons» tamment dans les cas particuliers. » Traitant à un autre endroit des mêmes transcendantes particulières, il affirme, quoiqu'il n'en ait pas la démonstration, que la constante peut toujours s'exprimer par les deux mêmes *éléments,* quel que soit le nombre des intégrales dont la somme algébrique a pour valeur cette constante; et il ajoute : « Des exemples nombreux appuient cette assertion, que la théorie » n'a pas jusqu'à présent établie d'une manière absolument cer» taine. »

» La généralité de ce fait analytique, qu'admettait Legendre, est mise hors de doute par le théorème de M. Bouquet, duquel elle résulte immédiatement.

» En résumé, le Mémoire de M. Bouquet renferme un résultat nouveau et intéressant. Nous proposons donc à l'Académie de lui accorder son approbation, et d'en ordonner l'insertion dans le *Recueil des Savants étrangers.* »

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

MM. C. Wolf et Rayet. — *Sur lal umière de la comète de Winnecke.* (Comète I, 1870.)

M. E. Catalan. — *Remarques sur une Note de M. Darboux, relative à la surface des centres de courbure de l'ellipsoïde.*

Dans une précédente Communication (*), M. Darboux a eu à considérer l'équation différentielle des lignes de courbure, et il avait énoncé la proposition générale suivante :

Étant donnée une équation différentielle

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

si l'on cherche le lieu des points du plan pour lesquels deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ fournies par l'équation précédente deviennent égales, le lieu de ces points n'est pas en général l'enveloppe des solutions particulières. C'est un lieu de points de rebroussement pour les courbes

(*) Voir *Bulletin*, p. 339.

représentant les différentes solutions particulières. Par exemple, si l'on considère l'équation simple

$$A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + B\frac{dy}{dx} + C = 0,$$

l'équation

$$R = B^2 - 4AC = 0$$

représente une courbe pour les points de laquelle les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ deviennent égales; mais cette courbe n'est pas en général l'enveloppe des courbes représentant les solutions particulières. Ce théorème est confirmé par plusieurs exemples géométriques très-généraux. Ainsi, si l'on considère, sur une surface d'un ordre supérieur à 2 la courbe parabolique séparant les points pour lesquels la courbure de la surface est négative de ceux pour lesquels les rayons de courbure sont de même signe, cette ligne parabolique n'est pas tangente en général aux lignes asymptotiques; celles-ci ne peuvent pénétrer dans la région où la surface est convexe, elles viennent couper la ligne parabolique sous un angle fini et ont, sur cette ligne, un point de rebroussement.

Mais la proposition générale qui précède est, par sa nature même, sujette à des exceptions. Il est bien vrai, pour citer un exemple semblable, qu'en général une courbe n'a qu'une seule tangente en un point, qu'en général on ne sait pas intégrer une équation différentielle. M. Catalan a cependant contribué lui-même à réduire le nombre de celles qu'on ne sait pas intégrer. Aussi n'est-il pas difficile de donner une infinité d'exemples dans lesquels la proposition de M. Darboux est en défaut. Pour l'infirmer, il faudrait prouver qu'elle n'a pas lieu en général, et c'est ce que M. Catalan ne fait pas. Il y a là un simple malentendu.

M. Catalan indique encore dans sa Note certaines formules relatives à la surface des centres de courbure de l'ellipsoïde, comme ayant été données par lui dans ses *Mélanges mathématiques*, p. 263. Enfin, il termine par trois propositions sur cette surface. Voici l'une de ces propositions :

Le long d'une même ligne de courbure de l'ellipsoïde, le rayon principal varie en raison inverse de la distance du centre au plan tangent.

N° 2. Séance du 11 juillet 1870.

Séance publique (*).

N° 3. Séance du 18 juillet 1870.

M. Duhamel *fait hommage à l'Académie du volume qui forme la quatrième partie de son ouvrage :* Des Méthodes dans les Sciences de raisonnement.

« J'ai l'honneur de présenter à l'Académie la dernière Partie de mon ouvrage sur les Méthodes dans les Sciences de raisonnement. Dans la première partie, j'ai exposé d'une manière générale la marche que l'on doit suivre dans la recherche ou la démonstration de la vérité, et dans l'établissement d'une science de raisonnement. J'en ai fait d'abord l'application aux sciences les plus simples, celle des nombres et celle de l'étendue : je considère aujourd'hui la science des forces.

» Les données des deux premières sont fondées, jusqu'à un certain point, sur l'observation; mais elles sont d'une telle nature, que l'esprit conçoit qu'elles subsisteraient lors même que le monde matériel serait anéanti. Il n'en est pas de même de la science des forces; elle dépend de la nature de ce monde, qui aurait pu être créé différent de ce qu'il est, et soumis à d'autres lois. Les données de cette science doivent donc reposer sur l'observation de ces lois, et sur des expériences propres à les manifester.

» Il est un point sur lequel nous espérons obtenir l'assentiment des géomètres et des philosophes : jusqu'ici, dans l'étude du mouvement produit par les forces, on a commencé par considérer ce qu'on appelle le *mouvement absolu;* et ce n'est qu'après en avoir établi la théorie qu'on passe à celle du mouvement relatif. Nous nous sommes placé dans un ordre d'idées tout différent : nous ne fondons rien sur le mouvement ou le repos absolu; nous n'en parlons même que pour combattre cette notion, qui ne repose que sur la fixité supposée des points de l'*espace absolu,* c'est-à-dire sur un cercle vicieux, où entre la considération d'un être purement imaginaire. »

M. de Saint-Venant. — *Démonstration élémentaire de la formule de propagation d'une onde ou d'une intumescence dans un canal prismatique, et remarques sur la propagation du son et de la lumière, ainsi que sur la distinction des rivières et des torrents.*

(*) Voir *Bulletin*, p. 254.

M. Painvin. — *Détermination des éléments de l'arête de rebroussement d'une surface développable, définie par ses équations tangentielles.*

Cette communication remplit une lacune qui existait dans les formules relatives aux courbes. Étant donnée une courbe définie par ses équations ordinaires, on saura trouver, en appliquant les formules usuelles, les éléments géométriques se rapportant à cette courbe. Mais il arrive assez souvent qu'une courbe ne peut être définie d'une manière simple que par ses plans osculateurs, ou, si l'on veut, par ses équations tangentielles. M. Painvin donne le moyen d'obtenir directement tous les éléments de la courbe.

L'application de ces formules à la surface développable circonscrite à une surface du second ordre et à une sphère a conduit M. Painvin à des résultats très-dignes d'intérêt. En particulier, l'arête de rebroussement de cette surface est *rectifiable.*

M. F. Lucas. — *De la possibilité d'obtenir des signaux de feu à longue portée.*

M. Sonrel. — *Étude photographique du Soleil à l'Observatoire de Paris.*

N° 4. Séance du 25 juillet 1870.

P. Secchi. — *Nouvelles remarques sur les spectres fournis par divers types d'étoiles.*

M. Faye. — *Sur une brochure nouvelle de M. Hirn.*

M. Bertrand. — *Rapport sur un Mémoire de M. Massieu, intitulé :* Mémoire sur les fonctions des divers fluides et sur la théorie des vapeurs.

Dans ce Rapport, M. Bertrand rend compte d'un important travail de M. Massieu, qui constitue un progrès des plus sérieux dans la théorie nouvelle de la chaleur.

« Le Mémoire de M. Massieu, dont nous venons rendre compte à l'Académie, nous semble conçu dans un excellent esprit. Acceptant sans les discuter et sans s'arrêter à les démontrer de nouveau les deux théorèmes importants dont on a fait la base de la théorie mathématique des effets calorifiques, M. Massieu s'attache d'abord à les résumer sous la forme la plus simple, et son travail apporte à cette théorie tant étudiée un progrès réel et incontestable.

» Le problème dont la solution rendrait la théorie parfaite et définitive serait celui-ci.

« Exprimer pour chaque corps, en fonction de deux variables » indépendantes, la température et la pression, par exemple, les » divers éléments physiques qui en dépendent, tels que le volume et » les deux caloriques spécifiques. En se bornant à ces trois inconnues » qu'il semble impossible de séparer, la théorie générale, résumée » dans deux théorèmes, dont l'un peut s'appeler *théorème de Carnot* » ou *de Clausius,* et l'autre *théorème de Mayer* ou *de Joule,* fournit » deux équations seulement entre trois inconnues, qui restent par » conséquent indéterminées, et il ne saurait en être autrement, » puisque les relations à obtenir changent complétement de forme » — cela paraît évident — avec la nature et l'état des corps. »

» La première partie du travail de M. Massieu, consacrée à ce problème général, en donne la solution complète et fort simple, dans l'expression de laquelle figure explicitement une fonction arbitraire qu'il nomme *caractéristique,* et dont la forme, variable d'une substance à l'autre, peut servir à caractériser chacune d'elles en déterminant tous ses éléments calorifiques.

» L'intégration complète de deux équations différentielles partielles du second ordre doit sembler, dans l'état de la science, une bonne fortune inespérée qu'aucune méthode connue ne pourrait promettre. Aussi n'est-ce pas par cette voie que M. Massieu aborde le problème. Les deux équations dont il s'agit expriment, on le sait, que certaines expressions sont des différentielles exactes; c'est en prenant pour inconnues leurs intégrales, ou plutôt en les considérant comme données, que l'on obtient la solution dont l'extrême simplicité accroît plutôt qu'elle n'amoindrit le mérite. Nous croyons utile de donner ici l'expression complète des formules les plus simples définitivement adoptées par M. Massieu.

» Soit dQ la quantité de chaleur nécessaire pour faire passer un corps, de la température t à la température $t + dt$, et du volume v au volume $v + dv$; on sait que, p désignant la pression, et A un coefficient constant pour tous les corps, les expressions

$$dQ - A p dv,$$

$$\frac{dQ}{T},$$

où T désigne la température *absolue* comptée à partir de — 273 degrés, doivent être des différentielles exactes; et que c'est ainsi que peuvent se traduire les deux théorèmes fondamentaux de la théorie nouvelle.

» Posons donc

$$\frac{dQ}{T} = dS,$$

$$dQ - A p\, dv = dU;$$

nous en conclurons

$$dU + A p\, dv + S\, dT = S\, dT + T\, dS = d(TS);$$

on a donc

$$S\, dT + A p\, dv = d(TS - U).$$

Posons

$$H = TS - U,$$

nous aurons

$$dH = S\, dT + A p\, dv.$$

La fonction H est *caractéristique* du corps, et M. Massieu montre très-aisément que, cette fonction étant connue, on peut, par de simples différentiations, exprimer toutes les propriétés calorifiques du corps correspondant, au moyen de cette fonction H et de ses dérivées. On a, par exemple, pour représenter les deux chaleurs spécifiques,

$$k = T\left[\frac{d^2H}{dt^2} - \frac{\left(\frac{d^2H}{ds\,dv}\right)^2}{\frac{d^2H}{dv^2}}\right],$$

$$k' = T\,\frac{d^2H}{dt^2}.$$

Le coefficient de dilatation β à pression constante, c'est-à-dire le rapport de la dérivée du volume $\frac{dv}{dt}$ au volume lui-même, est

$$\beta = -\frac{1}{v}\,\frac{\frac{d^2H}{dv\,dt}}{\frac{d^2H}{dv^2}},$$

et le coefficient de dilatation à volume constant β' est

$$= \frac{\frac{d^2H}{dv\,dt}}{\frac{dH}{dv}}.$$

» Quoique cette première partie du Mémoire de M. Massieu ne contienne aucun principe théorique nouveau, et qu'elle se résume dans l'expression plus simple et plus élégante de deux théorèmes très-connus, nous n'hésitons pas à la déclarer très-digne de l'approbation de l'Académie; l'introduction de la fonction caractéristique dans les formules qui résument toutes les conséquences possibles des deux théorèmes fondamentaux semble, pour la théorie, un service analogue et presque équivalent à celui qu'a rendu M. Clausius, lorsqu'il a donné au théorème de Carnot l'expression si élégante et si lumineuse qui le rattache à la fonction nommée par lui *entropie*.

» M. Massieu, après avoir proposé pour l'étude des corps l'emploi nouveau de la fonction caractéristique, recherche l'expression de cette fonction pour les gaz parfaits d'abord, pour les vapeurs saturées et pour les vapeurs surchauffées.

» L'étude des gaz parfaits, c'est-à-dire des fluides qui suivraient rigoureusement les lois de Mariotte et de Gay-Lussac, ne laisse subsister qu'une inconnue : le calorique spécifique à pression constante; en admettant, ainsi que l'a trouvé M. Regnault pour quelques gaz, qu'on puisse le considérer comme constant, le problème est entièrement résolu. M. Massieu pourtant y applique ses formules et donne l'expression de la fonction caractéristique en fonction du volume et de la température.

» En étudiant ensuite les vapeurs saturées, M. Massieu retrouve d'une manière élégante des résultats célèbres et déjà classiques, découverts par M. Clausius, et son seul but est, comme il le déclare, de montrer par ces applications la simplicité et la généralité de sa méthode.

» Le chapitre relatif aux vapeurs surchauffées laisse plus de place à l'incertitude; l'expérience ici n'a pas encore suffisamment préparé le terrain, et dans les formules générales ingénieusement obtenues par M. Massieu subsistent des inconnues sur lesquelles on en est réduit à des hypothèses plus ou moins plausibles.

» M. Massieu avait adopté d'abord celle de la constance du calorique spécifique à volume constant, en assimilant, sous ce point de vue très-important au moins, les vapeurs à un gaz parfait; il y substitue ensuite une loi empirique qui permet une plus grande approximation, sans présenter toutefois une plus grande garantie d'exactitude théorique.

» M. Massieu a eu néanmoins, sur cette question difficile, le mérite de donner une formule indépendante de toute hypothèse, par laquelle toutes les questions relatives à l'étude physique des vapeurs se trouveront résolues le jour où l'on aura déterminé, pour chaque température et pour chaque pression, les valeurs du calorique spécifique à pression constante.

» *Conclusions.* — En résumé, le Mémoire de M. Massieu nous paraît très-digne d'être approuvé par l'Académie, et inséré dans le *Recueil des Savants étrangers.* »

Les conclusions de ce Rapport sont adoptées.

M. Laussedat. — *Restauration d'un cadran solaire conique sur un fragment rapporté de Phénicie par M. Renan.*

M. Darboux. — *Réponse aux observations de M. Catalan, du 4 juillet dernier.*

MÉLANGES.

SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE CONIQUES ET DE SURFACES DU SECOND ORDRE;

Par M. G. DARBOUX.

On sait qu'on appelle *points conjugués* ou *pôles harmoniques* deux points tels, que le plan polaire ou la polaire de l'un passe par l'autre. La théorie des points conjugués communs à plusieurs surfaces ou coniques n'a pas encore été traitée complétement. Je me propose d'indiquer dans cette Note quelques-uns des résultats que j'ai obtenus dans l'étude de cette théorie.

Quand des surfaces passent par l'intersection de deux autres, on dit qu'elles forment un *faisceau*. On appelle *réseau* l'ensemble des surfaces passant par l'intersection de trois surfaces fixes, et, en général, *système linéaire du* $n^{\text{ième}}$ *ordre* ou à n constantes, le système

des surfaces qu'on obtient en combinant linéairement les équations de $n+1$ surfaces. Ainsi l'équation

$$\Sigma_1^{n+1}\lambda_i U_i = 0$$

représente un système linéaire d'ordre n; on obtiendra toutes les surfaces du système en donnant aux paramètres λ_i toutes les valeurs possibles.

En même temps que les systèmes linéaires formés avec les équations en coordonnées *ponctuelles* des surfaces, nous emploierons les systèmes formés avec les équations en coordonnées *tangentielles,* ou systèmes formés de *surfaces enveloppes*. Ainsi le faisceau tangentiel sera formé de surfaces inscrites dans une même développable, le réseau tangentiel, de surfaces en général tangentes à huit points, etc. Nous dirons qu'une quadrique, *lieu de points,* est conjuguée à une quadrique *enveloppe,* toutes les fois que cette quadrique sera circonscrite à un tétraèdre conjugué par rapport à la quadrique enveloppe. Cela posé, voici le théorème fondamental qui permet de ramener les uns aux autres les problèmes en apparence les plus différents.

A un système linéaire d'ordre n formé avec des équations en coordonnées ordinaires, correspond un système d'ordre $8-n$ formé de surfaces enveloppes. Toutes les quadriques du premier système sont conjuguées à toutes celles du second.

Ainsi, à une surface unique formant un système d'ordre 0 correspond le système d'enveloppes d'ordre 8, toutes conjuguées à cette surface. A un faisceau de quadriques correspond un système d'ordre 7 formé de surfaces conjuguées aux premières, etc., etc.

Dans la théorie des coniques, à un système d'ordre n correspond un système d'ordre $4-n$. Considérons, par exemple, un réseau : à ce réseau correspond un second réseau formé par les enveloppes conjuguées aux premières. Le lieu des points pour lesquels les premières coniques se décomposent en deux droites est une courbe du troisième ordre, la hessienne ou jacobienne du réseau, l'enveloppe des droites joignant les paires de points, dans lesquelles se décomposent les coniques enveloppes du second réseau, est une courbe de troisième classe qu'on appelle la *cayleyenne* du premier réseau. Les relations entre les deux réseaux de coniques expliquent la réciprocité si remarquable entre la cayleyenne et la hessienne, réciprocité qui a été mise en évidence par MM. Cayley et Cremona.

Voici un second exemple se rapportant aux coniques. Si l'on considère le système de quatre coniques, il y aura un faisceau de coniques enveloppes conjuguées à ces quatre coniques, les enveloppes seront inscrites dans un quadrilatère et les paires de sommets opposés donneront les trois couples de points conjugués aux quatre coniques. On obtient aussi la proposition suivante :

Quand deux coniques enveloppes sont conjuguées par rapport à une conique, toutes les coniques inscrites dans le quadrilatère circonscrit aux deux premières jouissent de la même propriété. Si l'on a deux couples de points conjugués par rapport à une conique, toutes les coniques inscrites dans le quadrilatère formé avec ces quatre points, et en particulier la troisième paire de sommets opposés du quadrilatère, sont conjuguées dans la conique.

La partie de ce théorème relative au troisième couple de points conjugués dans la conique déduit des deux premiers a été donnée depuis longtemps par M. Hesse. Il résulte encore de la proposition précédente le théorème suivant :

On ne peut pas, en général, circonscrire à une conique un quadrilatère dont les sommets opposés soient conjugués par rapport à une conique donnée.

Autrement :

Si de deux points conjugués dans une conique, on mène des tangentes à une autre conique, ces tangentes forment un quadrilatère dont les autres paires de sommets opposés seront toujours conjuguées dans la première conique ou ne le seront jamais.

Je reviens aux surfaces de second ordre. Supposons qu'étant données n surfaces, on demande de trouver les couples de points conjugués communs à ces surfaces. Ces couples de points pourront être considérées comme formant une quadrique enveloppe conjuguée par rapport à toutes les surfaces. Elle devra donc faire partie du système adjoint d'enveloppes d'ordre $8-n$. On aura donc à traiter la question suivante : Combien y a-t-il de paires de points? comment sont disposés ces points dans un système d'enveloppes, d'ordre $8-n$; ou, ce qui revient au même, combien y a-t-il de couples de plans dans le système ordinaire de même ordre? Je commence par les cas les plus simples.

Faisceaux. — Dans ce cas, il y a sur toute droite une paire de

points conjugués, un point a une infinité de conjugués en ligne droite. Il n'y a à considérer que les lignes droites, intersections communes des plans polaires d'un point par rapport à toutes les surfaces. Ces droites, ne dépendant que de trois constantes, forment un système de rayons rectilignes de la nature des systèmes appelés *complexes* par Plücker. On les définit par la propriété suivante : elles coupent les faces du tétraèdre conjugué commun aux deux surfaces en quatre points dont le rapport anharmonique est constant. Ce *complexe* de droites a été considéré par M. Chasles, et, dans ces derniers temps par MM. Reye, Klein et Lie. Il se transforme par l'homographie dans le complexe des normales aux surfaces homofocales du second ordre. Dans ce cas, on sait déterminer *tous* les systèmes d'ordre quelconque normaux à ces droites (*). Nous le rencontrerons aussi dans l'étude des réseaux. Signalons dès à présent cette propriété : Quand un point A décrit une surface d'ordre n, les droites correspondantes forment une *congruence* d'ordre n et de classe $3n - \alpha$, α étant le nombre de fois que la surface passe par des sommets du tétraèdre. Ainsi à une surface du second ordre correspondent tous les systèmes de rayons rectilignes d'ordre 2 et de classe égale ou inférieure à 6. On retrouve, comme cas particulier, le problème des normales à une surface du second ordre.

Réseaux. — Les réseaux sont, *en général,* formés de surfaces passant par huit points. Dans ce cas, à un point A correspond un seul conjugué A'. Les droites AA' coupent les surfaces suivant des segments en involution, elles forment un *complexe* très-important du troisième ordre. Ce complexe peut aussi être considéré comme formé des génératrices rectilignes de toutes les surfaces, ou, ce qui revient au même, des sécantes doubles ou des tangentes de toutes les courbes du quatrième ordre, intersections de deux quadriques du réseau. Toutes les droites passant par un point O forment un cône du troisième ordre, ayant pour directrice la courbe du quatrième ordre, intersection des surfaces du réseau passant en O. Les huit droites qui

(*) En général, étant données les normales à un système de surfaces, on peut déterminer sans intégration tous les systèmes de surfaces normales aux mêmes droites. Cette propriété, très-utile, et dont la démonstration est des plus simples, ne paraît pas connue; du moins elle n'est pas signalée dans les travaux récents sur les droites qui remplissent l'espace.

joignent O aux points communs, les vingt-huit droites qui, partant de ce point, sont des sécantes doubles des vingt-huit cubiques gauches passant par six des huit points communs, ces trente-six droites sont sur le cône du troisième ordre (*). Celles de ces droites qui sont dans un plan P enveloppent une courbe du sixième ordre et de la troisième classe, la cayleyenne du réseau des coniques sections des surfaces par le plan P.

Le cône du troisième ordre se décompose en un cône du second ordre et un plan dans deux cas différents. On sait que les cônes du réseau ont leurs sommets sur une courbe du sixième ordre K_6. Toutes les fois que le point O se trouve sur cette courbe, le cône du complexe se décompose en un plan et en un cône du second ordre, qui est le cône du réseau ayant son sommet en O. Les cônes du système enveloppent une surface de la huitième classe et du vingt-quatrième ordre, pour les points de laquelle le cône du complexe acquiert une génératrice double. Les plans dans lesquels se décompose le cône quand O est sur K_6, enveloppent une surface développable de la quatorzième classe. Il y a des théorèmes analogues relatifs aux droites situées dans un plan. Enfin, quand le point O se trouve sur une des vingt-huit cubiques gauches du réseau, le cône du complexe se dé-décompose en un cône du second ordre contenant la cubique gauche, et un plan passant par les deux points communs aux surfaces non situés sur la cubique considérée.

La courbe K_6 a été étudiée par M. Hesse (*Journal de Crelle*, t. XLIX), dans un de ses plus importants Mémoires. Elle n'est jamais sur une surface du second ordre et six de ses points ne sont jamais sur une conique. On reconnaît facilement dans quel cas elle se décompose, ce qui est important pour l'étude qui va suivre.

Puisqu'à un point A correspond un autre point conjugué A' et inversement, on a un mode de transformation *involutive*, analogue à la transformation de Mœbius. A une surface d'ordre n contenant la ligne K_6 comme ligne multiple d'ordre q correspond une surface d'ordre $3n - 8q$ contenant K_6 comme ligne multiple d'ordre $n - 3q$.

(*) Il faut ajouter à ces vingt-huit droites, vingt-huit autres droites passant par O, coupant à la fois une des cubiques gauches, et la droite qui joint les deux points communs aux surfaces qui ne sont pas sur cette cubique.

C'est ainsi qu'à un plan correspondent toutes les surfaces du troisième ordre contenant K_6, à une surface du quatrième ordre contenant K_6 correspond une surface de même genre, etc. A une courbe d'ordre n, coupant la courbe des sommets en α points, correspond une courbe d'ordre $3n - \alpha$ coupant en $8n - 3\alpha$ points, etc.

Les sécantes triples de la courbe K_6 forment une surface réglée du huitième ordre, qui est la jacobienne du système des surfaces du troisième ordre passant par la courbe, et qui contient six droites de chacune des surfaces.

Il n'est pas exact que les équations de trois quadriques puissent être ramenées à la forme canonique

$$f = \Sigma_1^5 \lambda_i P_i^2 = 0,$$
$$f_1 = \Sigma_1^5 \mu_i P_i^2 = 0,$$
$$f_2 = \Sigma_1^5 \nu_i P_i^2 = 0.$$

Les trois seconds membres contiennent bien trente constantes, mais on peut montrer que, si la transformation est possible d'une manière, elle le sera d'une infinité d'autres manières, et l'on est ainsi conduit au théorème suivant :

En général, on ne peut pas trouver de pentagone dont les sommets non adjacents soient conjugués à la fois dans trois surfaces, et quand on trouve un de ces pentagones, il y en a une infinité d'autres jouissant de la même propriété. Leurs sommets décrivent la courbe K_6, *leurs plans enveloppent une cubique gauche et leurs côtés décrivent la surface réglée du huitième ordre engendrée par les sécantes triples de la courbe* K_6 (*).

Les réseaux de quadriques présentent plusieurs cas particuliers dignes d'attention. Si les quadriques ont une droite commune, le

---

(*) Le théorème précédent est analogue aux théorèmes de Poncelet. Voici d'autres propositions du même genre qu'on déduit de notre théorème fondamental :

L'équation $\Sigma_1^9 \lambda_i P_i^4 = 0$ contient trente-six constantes, une de plus qu'il n'y en a dans l'équation générale des surfaces du quatrième ordre ; cependant elle ne peut représenter la surface générale de cet ordre ; pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'un invariant du dixième ordre par rapport aux coefficients soit nul, et alors la transformation précédente est possible d'une infinité de manières, les plans P restant tangents à une surface du second degré.

Si l'on peut trouver un polygone circonscrit à une conique et dont tous les sommets soient sur une courbe algébrique, il y en aura une infinité d'autres jouissant de la même propriété.

complexe des génératrices se divise en deux, les génératrices d'un système vont rencontrer la droite commune, les autres forment un *complexe du second ordre identique* à celui que nous avons rencontré dans l'étude des faisceaux.

Systèmes du troisième ordre. — Les systèmes généraux du troisième ordre ont été peu étudiés. La *jacobienne* du système est une surface très-remarquable du quatrième ordre. On sait qu'elle peut être considérée de trois manières différentes : 1° comme le lieu des sommets des cônes du système ; 2° comme le lieu des paires de points conjugués par rapport à toutes les surfaces ; 3° comme le lieu des points où se touchent deux surfaces du système. La *hessienne* d'une surface du troisième ordre, qui est la jacobienne d'un réseau particulier, a été étudiée par plusieurs géomètres, notamment par M. Cremona (*Journal de Borchardt*, t. LXVIII). Mais la jacobienne la plus générale, qui n'a pas de point double, mérite une étude spéciale. Si on lui adjoint une surface du quatrième ordre, que j'appellerai la *discriminante*, on a un système très-important de deux surfaces qui se partagent, au grand avantage de la netteté, les propriétés de la hessienne d'une surface cubique.

La jacobienne contient, on le sait, les dix droites qui sont les arêtes des couples de plans du système. Elle contient en outre : 1° dix cubiques gauches, sécantes doubles chacune de neuf droites ; 2° cent-vingt cubiques gauches sécantes de trois droites ; 3° quarante-cinq séries de courbes du quatrième ordre rencontrant huit droites, auxquelles il faut associer quarante-cinq autres séries de courbes de même ordre ne rencontrant que deux droites. Les propriétés des points conjugués sont les mêmes que pour la hessienne et se démontrent de la même manière.

La *discriminante* contient en général dix points doubles et ne contient pas de droite. Chaque point commun aux surfaces du système ajoute un point double à la discriminante (et à la jacobienne), en sorte que le système des surfaces passant par six points a pour discriminante la surface à seize points singuliers, et pour jacobienne une surface ayant vingt-cinq droites et six points doubles. Ces deux surfaces se correspondent point par point, comme dans le cas général.

Les dix points doubles de la discriminante ne sont jamais sur une surface du second ordre. Le théorème suivant donne la relation entre ces points :

Si de l'un des points doubles on fait la perspective des neuf autres sur un plan, les neuf projections appartiennent à une infinité de courbes du troisième ordre; le cône circonscrit à la surface, et ayant pour sommet l'un des points doubles, se décompose en deux cônes du troisième ordre.

En examinant les relations entre les points des deux surfaces J et D, on est conduit à des relations analogues à celles que M. Hesse a données entre la courbe plane du quatrième ordre et la courbe K_6; mais notre théorème fondamental permet, de plus, de faire correspondre non-seulement les points des deux surfaces, mais encore des éléments en dehors de ces deux surfaces. C'est ainsi qu'à un plan correspond une surface du troisième ordre à quatre points doubles, tangente à D, en tous les points d'une courbe du sixième ordre. Les lignes asymptotiques de cette cubique se déterminent sans difficulté, grâce au mode de correspondance indiqué ici (*).

Mais pour compléter l'ensemble des relations géométriques, il est nécessaire d'adjoindre aux surfaces précédentes une troisième surface beaucoup plus compliquée. C'est la surface *focale* de la congruence

---

(*) Les lignes asymptotiques de cette surface donnent celles de la surface de Steiner. On déduit, du reste, les lignes asymptotiques de beaucoup de surfaces du théorème suivant : *Soit une surface pour laquelle les coordonnées de l'un des points s'expriment par les formules*

$$x = A(\rho - a)^m(\rho_1 - a)^n,$$
$$y = B(\rho - b)^m(\rho_1 - b)^n,$$
$$z = C(\rho - c)^m(\rho_1 - c)^n,$$

l'équation différentielle des lignes asymptotiques sera

$$m(m-1)\frac{d\rho^2}{(\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)} = n(n-1)\frac{d\rho_1^2}{(\rho_1-a)(\rho_1-b)(\rho_1-c)}.$$

Ce théorème donne les lignes asymptotiques de la *surface des centres de courbure* de l'ellipsoïde, de la surface de Steiner, etc.

J'ajouterai que les lignes asymptotiques de la surface de Steiner ont déjà été déterminées par MM. Clebsch et Gordan (*Journal de Borchardt*, t. LXVIII, p. 1).

La proposition qui précède conduit en particulier à cette conséquence, qu'on sait déterminer les lignes asymptotiques des surfaces comprises dans l'équation

$$Ax^m + By^n + Cz^n + Dt^n = 0.$$

Ces surfaces remarquables, considérées par Lamé et plusieurs autres géomètres, comprennent, comme cas limite, les surfaces dont l'équation est

$$x^m y^n z^p = C,$$

et qui ont été étudiées par M. J.-A. Serret et M. Combescure.

En se bornant au cas du troisième ordre, on voit qu'on sait déterminer les lignes asymptotiques de la surface dont la Hessienne se réduit à quatre plans.

formée par les droites joignant deux paires de points conjugués. Ces droites sont celles qui coupent toutes les surfaces du système suivant des segments en involution. Elles forment un système de rayons rectilignes d'ordre 7 en général, et de classe 3. Leur surface focale est en même temps l'enveloppe des cônes du système. On construit géométriquement les points de contact de chaque rayon, les plans tangents en ces points : les propriétés de la surface rappellent celles de la cayleyenne d'un réseau de coniques. Les huit droites qui joignent les huit points communs à trois surfaces quelconques du système sont tangentes doubles de cette surface. Elle est en général de l'ordre 24 et de l'ordre 16. Son ordre diminue de quatre unités, sa classe de deux unités pour chaque point commun aux quadriques du système. Le cas le plus simple, celui où six points sont communs aux surfaces, est très-important. La surface se réduit à une cubique gauche passant par les six points, et l'on retrouve ce beau théorème de M. Paul Serret :

Toute droite qui coupe en involution quatre des systèmes de plans passant par six points est sécante double de la cubique gauche des six points.

Dans le cas où les surfaces ont un, deux, trois, quatre et cinq points communs, on retrouve les surfaces si remarquables à onze, douze,... et quinze points singuliers que M. Kummer a rencontrées dans ses belles études sur les rayons rectilignes. Tous les résultats qu'a trouvés M. Kummer s'expliquent ainsi géométriquement, les différents systèmes de rayons correspondant aux génératrices des surfaces du second ordre passant par les points fixes, les points doubles se divisant naturellement en deux classes, etc. Il faut cependant signaler une exception importante : l'on n'obtient pas la surface du douzième ordre sans plan singulier. Nous avons déjà rencontré cette surface dans un problème relatif aux faisceaux.

L'application de la discriminante sur un plan double s'effectue conformément à la méthode de M. Clebsch. La courbe de passage se compose de deux courbes du troisième ordre. La correspondance entre la surface à seize points singuliers D et la surface J, lieu des sommets des cônes passant par six points, est très-remarquable. Aux six points doubles de J correspondent six points doubles de D; les dix autres points doubles de cette surface correspondent aux dix

droites, arêtes des couples de plans passant par les six points. Les seize coniques singulières de D correspondent à la cubique gauche des six points et aux quinze droites joignant les six points. Enfin, les tangentes doubles de D se divisent en six systèmes correspondants aux systèmes de droites passant par les six points doubles de J.

Si l'on se propose de ramener les quatre équations des surfaces du système à la forme canonique,

$$f = \Sigma_1^6 \lambda_i P_i^2 = 0,$$

les quatre équations ainsi obtenues contiennent quarante-deux constantes. Il est possible cependant de montrer que si l'on a obtenu ces équations, on peut les transformer de manière à y introduire trois arbitraires; elles ne sont donc pas applicables à un système de quatre surfaces quelconques. On obtient ainsi le théorème suivant :

On ne peut pas, en général, trouver un hexaèdre dont les sommets opposés soient conjugués à la fois par rapport à quatre surfaces, et, quand il y a un hexaèdre satisfaisant à cette définition, il y en a une infinité d'autres. Les plans de ces différents hexaèdres enveloppent une surface du second ordre, leurs vingt sommets décrivent la jacobienne du système (*).

Systèmes du quatrième ordre. — A ces systèmes formés de cinq surfaces correspond un réseau d'enveloppes du même ordre. Il y a à considérer une courbe K_{10} du dixième ordre, et une développable D_{10} de dixième classe, réciproque de la première courbe.

Toute surface du quatrième ordre passant par K_{10} est la jacobienne de quatre surfaces du système, toute surface de quatrième classe inscrite dans D_{10} est la jacobienne tangentielle de quatre surfaces du système conjugué. Les points de K_{10} et les plans de D_{10} se groupent par paires aa', AA′ conjuguées les unes par rapport aux autres.

Les droites aa' forment une surface réglée du dixième ordre R_{10}; par chacune de ces droites on peut mener quatre plans tangents à D_{10}.

Les droites AA′ forment une surface réglée du même ordre R'_{10} coupant chaque jacobienne suivant dix droites et suivant K_{10} qu'elle

(*) Dans certains cas, l'indétermination des plans de l'hexaèdre est plus grande; cela se présente en particulier pour la hessienne d'une surface cubique.

a pour ligne triple. Cette surface réglée est le lieu des arêtes des couples de plans du système (*).

Ces propriétés sont évidentes, quand on connaît les relations des deux systèmes.

Ici se termine, grâce au théorème fondamental qui réduit de moitié le nombre des problèmes, l'étude des questions proposées. J'indiquerai en terminant les théorèmes suivants :

L'équation

$$\Sigma_1^7 \lambda_i P_i^2 = 0$$

représente toutes les surfaces conjuguées aux surfaces enveloppes inscrites dans les sept plans P_i. On peut toujours mettre les équations de sept surfaces sous la forme précédente, et cela de huit manières différentes.

Des équations de la forme

$$\Sigma_1^8 \lambda_i P_i^2 = 0$$

représentent toutes les surfaces conjuguées aux surfaces inscrites dans une même développable ; douze équations de la forme précédente contiennent cent-vingt constantes, et paraissent pouvoir représenter douze surfaces. Cependant on ne peut employer ces équations que pour huit surfaces.

L'équation

$$\Sigma_1^9 \lambda_i P_i^2 = 0$$

représente toutes les surfaces conjuguées à la surface inscrite dans les neuf plans. Quoique 27 équations de cette forme renferment 270 constantes, on ne peut pas les appliquer à plus de neuf surfaces.

On obtient ainsi comme cas particulier la proposition fondamentale dont M. Paul Serret a fait usage dans son livre sur la *Géométrie de Direction*.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Albrich (C.). — Sammlung von geometrischen Aufgaben. Gr. in-8. Hermannstadt, Michaelis. 6 Ngr.

(*) Tout plan tangent à D_{10} coupe K_{10} suivant les six sommets d'un quadrilatère complet, dont les trois diagonales appartiennent à R_{10}, et suivant quatre autres points en ligne droite.

American Ephemeris and Nautical Almanac for 1873. Roy.-8, 524 p. (Washington), London. 8 sh.

Bille (J.-F.). — Tabeller over Solens Declination, Rectascension og Tidsæqvation, sammt Maanens Culminations Klokkeslætter i Greenwich for Aaret 1873. Christiania, Cappelen. 8 Sk.

Björling (C.-F.-E.) (jr.). — Sur le mouvement rectiligne d'une molécule soumise à une force attractive ou répulsive, qui est une fonction algébrique, rationnelle et entière de la distance à un centre fixe. — Greifswald, Koch. Broch. in-8°.

Cramer (G.-H.). — Practische zeevaartkunde. Gr. in-8, 7 en 249 bl. Rotterdam, Van Belle. 2 fl. 70 c.

Delabar (G.). — Anleitung zum Linearzeichnen. 2. Thl., 3. Abth. Die Polar- und Parallelperspective. Qu. gr. in-8. Geb. Freiburg, Herder. $1\frac{1}{2}$ Thlr.

Dronke (A.). — Einleitung in die höhere Algebra. 1. Thl. Gr. in-8. Halle, Nebert. $\frac{3}{4}$ Thlr.

Forti (dott. *Angelo*). — Tavole dei Logaritmi de' numeri e delle funzioni circolari ed iperboliche, precedute dalla storia e teoria delle iperboliche, da applicazioni e da altre tavole di uso frequente. — 2 vol. in-16. Torino, Firenze, Milano; G.-B. Paravia e comp. 1870. 8 fr.

Guldberg (A.-S.). — Regningsarterne og deres Anvendelse, nærmest udarbeidet for Lærerne ved vore Borger-og Almuskoler. — Christiania, 1868. 30 Skill.

Hessel. — Uebersicht der gleicheckigen Polyeder. Gr. in-8. Marburg, Ehrhardt. $\frac{1}{6}$ Thlr.

Hofmann (F.). — Sammlung von Aufgaben aus der Arithmetik und Algebra. 1. Thl. 4., mit Rücksicht auf das metrische System umgearbeitete Auflage. Gr. in-8. Bayreuth, Grau. 16 Ngr.

Inskip (R.-M.). — Navigation and Nautical Astronomy. New edit. In-8, 166 p. London, Harrison. 6 sh. 6 d.

Lübsen (H.-B.). — Ausführliches Lehrbuch der Analysis. 5. Aufl. Gr. in-8. Leipzig, Brandstetter. 1 Thlr. 6 Ngr.

Montag (C.). — Ueber ein durch die Sätze von Brianchon und Pascal vermitteltes geometrisches Beziehungssystem. Dissert. Gr. in-8. Breslau, Maruschke und Berendt. $\frac{1}{2}$ Thlr.

Nyberg (B-A.). — Elementarkurs i räkning, metodiskt framstäld. Första kursen : hufvudräkning med 774 exempel. — Helsingfors, 1869.

Reimann (E.). — Die Höhenbestimmung der Sternschnuppen. Inaug.-Dissert. Gr. in-8. Breslau, Maruschke und Berendt. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Rosanes (J.). — Ueber die neuesten Untersuchungen in Betreff unserer Anschauung vom Raume. Gr. in-8. Breslau, Maruschke und Berendt. 6 Ngr.

Schubert (F.-C.). — Mathematisches Vademecum. 2. Aufl. In-8. Berlin, Wiegandt und Hempel. $\frac{5}{6}$ Thlr.

Seidel (L.). — Ueber die Grenzwerthe eines unendlichen Potenzausdruckes. Gr. in-8. München, Franz. 4 Ngr.

Smyth (C. Piazzi). — On an Equal Surface Projection for Maps of the World. In-8, sewed. London, Hamilton. 3 sh.

Wand (Th.). — Die Principien der mathematischen Physik und die Potentialtheorie. Gr. in-8. Leipzig, Teubner. 1 Thlr.

Waszmuth (A.). — Ueber ein neues Verfahren, den Reductionsfactor einer Tangentenboussole zu bestimmen. Lex.-8. Wien, Gerold. 2 Ngr.

Weihrauch (K.). — Untersuchung über eine Gleichung des 1. Grades mit mehreren Unbekannten. (Dissertat.) 45 p. in-4. Dorpat.

Wenzel (Georg). — Ueber die einfachste allgemeine Beziehung zwischen räumlichen Gebilden. Inaug.-Dissert. Gr. in-8, 58 S. Breslau, Maruschke und Berendt. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Weyr (E.). — Ueber Curvenbüschel. Lex.-8. Wien, Gerold. 1 $\frac{1}{2}$ Ngr.

Williams (W.-M.). — The Fuel of the Sun. In-8, 240 p. London, Simpkin. 7 sh. 6 d.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

MAYR (Dr Aloys), ordentl. Professor der Mathematik an der k. Universität zu Würzburg.—Construction der Differenzial-Gleichungen aus partikularen Integralen, und zwar aus einfachen Functionen, aus bestimmten Integralen und aus bestimmten Differenzialen. Fortsetzung der Prolegomena zur Theorie der Integration. — Würzburg, Julius Kellner's Buchhandlung; 1870 (*).

Dans un ouvrage publié en 1868, sous le titre de : *Der integrirende Factor und die partikularen Integrale* (Würzburg, J. Kellner), l'auteur a établi que les équations différentielles ne peuvent s'intégrer, en général, par des opérations directes, d'où ressort la nécessité de recourir à une méthode plus indirecte.

Cette méthode est la construction au moyen d'intégrales particulières, c'est-à-dire la formation d'un recueil d'équations différentielles admettant des intégrales de formes données. On voit que ce procédé a une certaine analogie avec ceux que l'on emploie pour la recherche des intégrales définies spéciales, dont on a formé des Tables par des moyens indirects de calcul.

On obtient ainsi, par le développement des méthodes de construction, un nombre de plus en plus grand d'équations intégrales, dans la catégorie desquelles on a d'autant plus de chances de pouvoir faire rentrer une équation proposée.

Les intégrales particulières employées dans la construction des équations sont ou des fonctions simples, telles que $x^\nu e^{ux}$; ou des intégrales définies, telles que $x^\nu \int e^{ux} V\,du$; ou des différentielles définies, telles que $x^\nu \frac{d\{Vd[\ldots d(e^{ux}V)]\}}{du^n}$. Ces dernières expressions se présentent comme des termes essentiels dans la série des diverses sortes d'intégrales particulières.

Voici les titres des sections dans lesquelles se divise cet ouvrage :

(*) Mayr (A.), professeur ordinaire à l'Université royale de Würzbourg. — *Construction des équations différentielles au moyen d'intégrales particulières, savoir : au moyen de fonctions simples, d'intégrales définies et de différentielles définies.* Suite des Prolégomènes à la théorie de l'intégration. — Würzbourg, J. Kellner, 1870. 1 vol. in-8°, 231 p. Prix : 1 Thlr. 24 Ngr.

I. Introduction. — II. Construction des équations différentielles. — III. Construction des équations différentielles au moyen de l'intégrale particulière $y = x^\nu e^{\lambda x}$. — IV. Construction des équations différentielles au moyen de l'intégrale particulière $y = x^\nu e^{\lambda x^\mu}$. — V. Autres formations d'équations différentielles au moyen des fonctions $y = x^\nu e^{\lambda x}$ et $y = x^\nu e^{\lambda x^\mu}$. — VI. Construction des équations différentielles au moyen de l'intégrale particulière $y = \int x^\nu e^{ux} V\, du$. — VII. Intégration au moyen des différentielles définies. — VIII. Conclusion.

L'auteur se propose de continuer ses recherches sur ce sujet fécond, et de les étendre aux équations différentielles à plusieurs variables indépendantes. J. H.

LIEBLEIN (Johann), ausserordentlicher Professor am Polytechnikum zu Prag. — SAMMLUNG VON AUFGABEN AUS DER ALGEBRAISCHEN ANALYSIS. — Prag, Verlag von H.-C.-J. Satow, 1867 (*). Pr. $1\frac{1}{2}$ Thlr.

Cet utile recueil est le seul qui ait été publié pour venir en aide aux personnes qui étudient cette branche si importante de l'Analyse, formant la transition entre l'Algèbre et le Calcul infinitésimal.

L'auteur a conformé le plan de son ouvrage à celui du *Handbuch der algebraischen Analysis* de M. Schlömilch (**). Voici les titres des Chapitres dans lesquels il est divisé :

I. Sur les diverses espèces de fonctions.

II. Sur les fonctions cyclométriques (ou fonctions circulaires inverses).

III Sur les valeurs-limites.

IV. Sur la continuité et la discontinuité des fonctions.

V. Sur la convergence et la divergence des séries infinies.

VI. Sur les séries doubles.

VII. Sur les développements en séries : (A) séries récurrentes;

(*) LIEBLEIN (J.), professeur extraordinaire à l'Institut Polytechnique de Prague. — *Recueil de Problèmes d'Analyse algébrique.* Prague, H.-C.-J. Satow, 1867. 1 vol. in-8°, 192 p.

(**) *Voir* le compte rendu de ce livre, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. III, p. 512; 1864.

(B) série binomiale, série exponentielle; (C) séries logarithmiques; (D) séries goniométriques et cyclométriques.

VIII. Sur les produits infinis.

IX. Sur les fonctions de variables complexes, et sur les séries et les produits de quantités complexes.

X. Sur les fractions continues.

L'ouvrage est terminé par les réponses aux diverses questions, avec des indications sur la manière de résoudre les plus difficiles.

J. H.

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN (*).

T. LXXVI (suite), n°s 1810-1824, 1870.

STEPHAN (E.). — *Positions moyennes pour 1870 de nébuleuses nouvelles.*

POWALKY (C.). — *Contributions pour une discussion plus complète des passages de Vénus, et détermination de quelques résultats plus exacts au moyen de ces passages.* (32 col.; all.)

WEISS (E.). — *Contributions à la connaissance des étoiles filantes* (2e Mémoire). (28 col.; all.)

Déterminations de hauteurs d'étoiles filantes dans la période d'août 1869. (*a*) Équation personnelle dans les observations d'étoiles filantes. (*b*) Calcul des observations correspondantes d'étoiles filantes. Calcul des orbites de météores pour un point radiant : 1° connu; 2° inconnu. (*c*) Calcul des observations correspondantes de la période d'août 1869.

ZÖLLNER (F.). — *Sur la température et la constitution physique du Soleil.* (18 col.; all.)

WINNECKE (A.). — *Liste de quelques nouvelles étoiles changeantes, avec les éléments approximatifs de leurs variations d'éclat.* (6 col.; all.)

(*) Voir *Bulletin*, p. 87, 280.

Schönfeld (E.). — *Contributions à l'étude des variations d'éclat des étoiles changeantes.* (24 col.; all.)

Oppolzer (Th.). — *Détermination définitive de l'orbite de la planète* (59) *Elpis.* (8 col.; all.)

Jordan (W.). — *Remarque sur la seconde solution de Gauss pour le problème fondamental de la géodésie supérieure.* (8 col.; all.)

Ce problème consiste, étant donnés la longueur d'une ligne géodésique tracée sur l'ellipsoïde terrestre, l'azimut à l'une de ses extrémités et la latitude géographique de cette extrémité, à en déduire l'azimut et la latitude pour l'autre extrémité, et la différence en longitude des deux extrémités.

Spörer. — *Observations des taches solaires.* (6 col.; all.)

Distribution héliographique pendant les Ire, IIe et IIIe périodes de rotation de 1870.

Peters (C.-H.-F.). — *Découverte d'une nouvelle planète* (112), *et éléments de* (111) *Até.*

Newcomb (S.). — *Sur une méthode très-précise pour déterminer les positions relatives des centres du Soleil et de la Lune pendant une éclipse de Soleil presque centrale.* (4 col.; angl.)

T. LXXVII, nos 1825-1837; 1870-1871.

Schubert (E.). — *Éléments d'Euphrosyne, leurs perturbations par Jupiter, et Table pour la solution du problème de Kepler.* (12 col.)

Dembowski. — *Observations d'étoiles doubles* (suite). (5 art., 24 col.; fr.)

Spörer. — *Observations des taches solaires* (suite). (2 art., 24 col.)

Distribution héliographique pendant les IVe, Ve, VIe, VIIe, VIIIe et IXe périodes de rotation de 1870.

Engelmann (R.). — *Détermination de l'éclat de quelques étoiles du ciel austral.* (12 col.; all.)

Matthiessen (L.). — *Constante magnétique de l'intensité horizontale à Jever (Gr.-D. d'Oldenbourg), lat. N. 53° 35′.*

Heis. — *Observations de la lumière zodiacale en 1870 à Münster.*

SCHUBERT (E.). — *Éléments de Polyhymnie, leurs perturbations par Jupiter, et Table pour la solution du problème de Kepler.* (10 col.)

SCHMIDT (J.-F.-J.). — *Observations d'étoiles variables à l'Observatoire d'Athènes en* 1870. (12 col.)

SCHMIDT (J.-F.-J.). — *Observations du Soleil en* 1870 *à l'Observatoire d'Athènes.* (6 col.; all.)

LITTROW (K. VON). — *Approches physiques des planètes de* (1) *à* (82) *pendant la présente année.* (4 col.; all.)

ZÖLLNER (F.). — *Sur la périodicité et la distribution héliographique des taches solaires.* (11 col.; all.)

WEISS (E.). — *Comptes rendus de l'expédition autrichienne envoyée à Aden pour l'observation de l'éclipse totale de Soleil de l'année* 1868. (26 col.; all.)

Observations pendant l'éclipse. De la méthode de Littrow pour la détermination du temps par les hauteurs circumméridiennes, au point de vue de l'usage pratique. Climatologie d'Aden. Coordonnées géographiques d'Aden. Observations d'étoiles filantes à Aden.

PHILOSOPHICAL TRANSACTIONS OF THE ROYAL SOCIETY OF LONDON (*).

T. CLIX, Seconde Partie; 1870.

ANDREWS (Th.). — *Sur la continuité des états gazeux et liquide de la matière.* (16 p.)

GUTHRIE (Fr.). — *Sur la résistance thermale des liquides.* (24 p.)

T. CLX; 1870.

FERRERS (N.-M.). — *Note sur la représentation proposée par M. Sylvester pour le mouvement d'un corps rigide libre, par celui d'un ellipsoïde dont le centre est fixe et qui roule sur un plan non poli.* (7 p.)

M. Sylvester a donné (*Philosoph. Transact.*, 1866) une extension importante de la représentation indiquée par Poinsot pour le mou-

(*) Voir *Bulletin*, p. 181.

vement d'un corps solide tournant librement, au moyen de l'ellipsoïde d'inertie. Il a prouvé que, si un ellipsoïde matériel, semblable à l'ellipsoïde d'inertie, et tel que ses moments d'inertie principaux A, B, C soient liés à ses demi-axes par la relation

$$\mathrm{A}a^4(b^2-c^2)+\mathrm{B}b^4(c^2-a^2)+\mathrm{C}c^4(a^2-b^2)=0,$$

est assujetti à rouler sur un plan parfaitement dépoli, le mouvement de cet ellipsoïde matériel sera exactement le même que celui de l'ellipsoïde d'inertie du corps solide, le plan dépoli tenant lieu du plan géométrique fixe, en contact avec lequel l'ellipsoïde d'inertie est supposé rouler. Il a aussi trouvé des expressions de la pression et du frottement de l'ellipsoïde contre le plan dépoli, en fonction de la vitesse angulaire de l'ellipsoïde, des longueurs de ses axes, et de la distance de son centre au plan dépoli. En cherchant directement les valeurs de ces forces, M. Ferrers a été conduit à une autre manière de traiter le problème, qui lui a fourni quelques théorèmes intéressants.

Perry (St.-J.). — *Sur l'état magnétique de l'ouest de la France en* 1868. (18 p.)

Cayley (A.). — *Mémoire sur la Géométrie abstraite.* (13 p.)

L'étude des quantités qui dépendent de deux ou de trois variables est considérablement éclaircie par la représentation de ces quantités par des points d'un plan ou de l'espace. Lorsqu'une quantité dépend de plus de trois variables, il est avantageux, pour la facilité de l'exposition, de conserver le langage géométrique, en concevant la quantité comme représentée par un point d'un espace de plus de trois dimensions. Un exemple important de ce cas se présente dans la Géométrie plane, à propos de la détermination du nombre des courbes qui satisfont à des conditions données. Les conditions impliquent des relations entre les coefficients de l'équation de la courbe; et, pour mieux comprendre ces relations, il est utile de considérer les coefficients comme les coordonnées d'un point dans un espace d'un nombre convenable de dimensions.

Crofton (M.-W.). — *Sur la preuve de la loi des erreurs des observations.* (13 p.)

L'objet de ce Mémoire est de donner la preuve mathématique, sous sa forme la plus générale, de la loi des erreurs d'observation

isolées, d'après l'hypothèse qu'une erreur, dans la pratique, provient de l'action concourante d'un grand nombre de sources d'erreurs indépendantes, dont chacune, si elle existait seule, produirait des erreurs extrêmement petites en comparaison de celles qui proviennent de toutes les autres sources combinées. Cette preuve est contenue dans un procédé général, proposé en vue d'un objet différent, savoir, dans la généralisation donnée par Poisson aux recherches de Laplace sur la loi des résultats moyens d'un grand nombre d'observations.

Airy (G.-B.). — *Note sur une extension de la comparaison des perturbations magnétiques avec les effets magnétiques conclus des courants galvaniques terrestres observés: et discussion des effets magnétiques conclus des courants galvaniques dans les jours de tranquillité magnétique.* (12 p.)

Sabine (Sir Edw.). — *Contributions au magnétisme terrestre.* — N° XII : *État magnétique des Iles Britanniques, réduit à l'époque* 1842-1845. (11 p.)

Rankine (W.-J.-M.). — *Sur la théorie thermodynamique des ondes d'une perturbation longitudinale finie.* (12 p.)

L'objet de ce travail est de déterminer les relations qui doivent exister entre les lois de l'élasticité d'une substance quelconque, gazeuse, liquide ou solide, et celles de la propagation ondulatoire d'une perturbation longitudinale finie dans cette substance; en d'autres termes, d'une perturbation consistant en déplacements des particules suivant la direction de la propagation, la vitesse de déplacement des particules étant assez grande pour n'être pas négligeable vis-à-vis de la vitesse de propagation. Le but spécial de ces recherches est de déterminer quelles conditions doivent être remplies, relativement au transport de la chaleur de particule à particule, pour qu'une perturbation longitudinale finie puisse se propager le long d'une masse prismatique ou cylindrique, sans perte d'énergie ni changement de *type*, le mot *type* étant employé pour désigner la relation entre l'étendue de la perturbation d'une série de particules, à un instant donné, et leurs positions non troublées respectives. La matière troublée peut être conçue, dans ces recherches, comme contenue dans un tube rectiligne de section uniforme et de longueur indéfinie.

Spottiswoode (W.). — *Sur le contact des coniques avec les surfaces.* (20 p.)

On sait qu'en chaque point d'une surface on peut mener deux tangentes, appelées *tangentes principales,* qui ont avec la surface un contact du second ordre, c'est-à-dire d'un ordre plus élevé que n'est en général l'ordre de contact d'une droite et d'une surface. L'objet du présent Mémoire est d'établir le théorème correspondant, relativement aux coniques tangentes, savoir, qu'en chaque point d'une surface on peut mener dix coniques ayant avec la surface un contact du cinquième ordre, et qu'on peut appeler *coniques tangentes principales.*

Roscoe (H.-E.). — *Sur la relation entre la hauteur du Soleil et l'intensité chimique de la lumière solaire totale par un ciel sans nuages.* (8 p.)

Tyndall (J.). — *Sur l'action des rayons d'une grande réfrangibilité sur la matière gazeuse.* (33 p.)

Glaisher (J.-W.-L.). — *Tables des valeurs numériques du sinus intégral, du cosinus intégral, et de l'exponentielle intégrale.* (22 p.)

Ces tables donnent, avec dix-huit, onze et sept décimales et trois ordres de différences, les valeurs des transcendantes

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx,\quad \int_\infty^x \frac{\cos x}{x}\,dx,\quad \int_\infty^{-x} \frac{e^{-x}}{x}\,dx,$$

dont la dernière est connue aussi sous le nom de *logarithme intégral.* Le Mémoire est accompagné de figures représentant la marche de ces transcendantes, dont les maxima et minima sont donnés dans des tables auxiliaires. L'auteur indique plusieurs corrections aux tables des mêmes fonctions construites par Bretschneider.

Warren de la Rue, B. Stewart et B. Loewy. — *Recherches sur la physique solaire.* — N° II : *Positions et aires des taches observées à Kew en* 1864, 1865, 1866; *grandeur de la portion du disque visible du Soleil renfermant des taches, depuis le commencement de* 1832 *jusqu'en mai* 1868. (108 p.)

Jevons (W.-St.). — *Sur les moyens mécaniques pour exécuter les opérations de raisonnement.* (22 p.)

Strutt (J.-W.). — *Sur les valeurs de l'intégrale* $\int_0^1 Q_n Q_{n'}\,d\mu,$

Q_n *et* $Q_{n'}$ *étant les coefficients de Laplace des ordres* n *et* n', *avec une application à la théorie de la radiation.* (12 p.)

Royston-Pigott (G.-W.). — *Sur l'application au microscope d'un chercheur pour les images aplanétiques, et sur ses effets pour augmenter le grossissement et la netteté des images.* (13 p.)

TIDSSKRIFT for Mathematik. Udgivet af Camillo Tychsen (*).

T. VI, 1870.

Steen (Ad.). — *Récréations mathématiques.* (2 art.; 28 p.)
Théorie mathématique de plusieurs tours de cartes.

Seidelin (C.). — *Démonstration de quelques propositions sur les permutations et les combinaisons. — Démonstration d'un théorème de stéréométrie.* (4 p.)

Hansen (P.-C.-V.). — *Méthode de Cauchy pour l'intégration des équations différentielles partielles du premier ordre.* (3 art.; 28 p.)

Zeuthen (H.-G.). — *Nouvelles remarques sur les solutions singulières.* (7 p.)

L'auteur examine en particulier les difficultés qui peuvent se présenter lorsque, l'intégrale générale étant $F(x, y, C) = 0$, la solution singulière correspond au cas où le rapport $\frac{F'(x)}{F'(y)}$ se présente sous l'une des formes $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

Lorenz (L.). — *Sur la force centrifuge.* (3 p.)

Le mot de *force centrifuge* est pris dans deux acceptions : l'une, l'acception vulgaire, partant de l'idée d'une force qui *agirait* sur le corps animé d'un mouvement de rotation; l'autre, l'acception scientifique, qui considère cette force comme *émanant* du corps. La crainte de faire naître une équivoque entre ces deux significations a engagé, dans ces derniers temps, la plupart des auteurs à abandonner l'usage de cette expression. M. Lorenz est d'avis qu'on la conserve, mais en

---

(*) Voir *Bulletin*, p. 179. A partir de l'année 1871, la rédaction de ce Journal passe entre les mains de M. *H.-G. Zeuthen*, bien connu des lecteurs du *Bulletin*.

distinguant par les épithètes de *virtuelle* ou de *réelle* les cas où elle serait prise dans l'acception vulgaire ou dant l'acception scientifique.

Steen (Ad.). — *Sur les coordonnées trilinéaires.* (3 art., 25 p.)

Suite et fin d'une série d'articles publiés dans les tomes précédents de ce Journal.

Jensen (E.). — *Calcul de la quantité de chaleur développée dans le mouvement d'une météorite à travers l'atmosphère.* (85 p.)

Hansen (P.-C.-V.). — *Quelques propositions sur les surfaces du second ordre.* (17 p.)

Détermination du volume et du centre de gravité d'un corps limité par une surface du second degré et par deux plans parallèles.

Thiele (T.-N.). — *Théorie des fonctions qui dérivent des fractions continues finies.* (26 p.)

L'auteur s'élève contre l'abandon où cette théorie est laissée en Danemark (*). Il commence son exposition par le cas des fractions continues finies, où il introduit pour la première fois la représentation d'une fraction continue sous forme d'un quotient de deux déterminants. Cette considération l'a conduit à une notation très-avantageuse pour désigner les éléments des fractions continues à l'aide d'indices.

Freuchen (P.). — *Expression du volume d'un polyèdre limité par des triangles, au moyen des coordonnées rectangulaires des sommets du polyèdre.*

ANNALI di Matematica, diretti da F. Brioschi e L. Cremona (**).

2e Série, t. III, octobre 1869 à mai 1870.

Casorati (F.). — *Des relations fondamentales entre les modules de périodicité des intégrales abéliennes de première espèce.* (27 p.; it.)

Ce travail se rapporte à un point très-important de la théorie des fonctions abéliennes donnée par MM. Clebsch et Gordan dans leur

---

(*) On y donne, par un jeu de mots, aux fractions continues (*Kjædebröker*) le nom de *kjedelige Bröker* (fractions ennuyeuses).

(**) Voir *Bulletin*, p. 311.

ouvrage intitulé *Theorie der Abel'schen Functionen* (Leipzig, 1866). On sait que Riemann a donné, pour l'étude des fonctions imaginaires, une méthode qui a paru très-compliquée à plusieurs géomètres. MM. Clebsch et Gordan sont revenus aux principes posés par Cauchy et M. Puiseux, et ils ont donné des propositions fondamentales se rapportant aux périodes des intégrales des fonctions algébriques. Malheureusement, ces éminents géomètres ont réuni en un trop petit nombre de pages, très-difficiles à lire, un grand nombre de résultats essentiels, et M. Casorati rend certainement le plus grand service à tous ceux qui s'occupent de cette théorie, en ajoutant dans son travail d'heureux éclaircissements au quatrième chapitre de l'ouvrage allemand déjà cité.

Sturm (R.). — *Combien y a-t-il de sécantes communes à deux cubiques gauches?* (5 p.; fr.)

On sait qu'on appelle *sécantes* les droites qui coupent les courbes en *deux* points. On peut mener par tout point de l'espace une seule sécante; dans un plan, au contraire, se trouvent trois sécantes joignant deux à deux les trois points d'intersection du plan et de la cubique gauche.

Dans l'article que nous indiquons ici, M. Sturm démontre qu'étant données deux cubiques gauches quelconques, elles ont, en général, *dix* sécantes communes, ne se rencontrant pas les unes les autres.

Si les cubiques ont un point commun, quatre des sécantes communes passeront par ce point.

Si elles ont deux points communs a, b, il y aura la droite ab, trois sécantes passant en a et trois en b, et, en outre, trois autres sécantes communes.

Si elles ont trois points communs a, b, c, on obtient les côtés du triangle abc, deux droites passant en a, deux en b, deux en c, et enfin une sécante commune ne contenant aucun des points a, b, c.

Si les cubiques ont quatre points communs, toutes les sécantes communes passent par un de ces quatre points; mais il y a un cas remarquable : celui où les deux cubiques sont sur une même surface du second ordre. Cela arrivera toutes les fois qu'elles couperont un plan en six points situés sur une conique. Dans le cas où les cubiques seront sur une même surface, elles auront une infinité de sécantes communes, toutes les génératrices d'un système de l'hyperboloïde.

Enfin, si les cubiques gauches ont cinq points communs, elles sont sur un même hyperboloïde, mais les génératrices de l'un des systèmes qui sont sécantes doubles de l'une des cubiques coupent l'autre en un seul point. Les dix sécantes doubles communes sont ici les droites qui joignent deux à deux les cinq points communs aux deux courbes.

Pour démontrer ces résultats, M. Sturm emploie une méthode de transformation dans laquelle à une droite correspond une courbe du quatrième ordre à trois points doubles. Elle se détermine de la manière suivante : Si l'on a deux plans dans l'espace, une sécante double de la cubique gauche les coupe en deux points qui se correspondent.

Brill (A.). — *Sur le problème de la rotation des corps.* (8 p.; it.)

On sait que Jacobi a, par l'introduction des fonctions elliptiques, ramené les formules qui donnent la solution de ce problème à un haut degré de simplicité. Il a montré que les cosinus des angles que font les axes principaux du corps avec les axes coordonnés peuvent s'exprimer par des quotients des fonctions Θ. M. Brill donne une solution nouvelle de cette question, solution dont le caractère essentiel est d'éviter l'emploi des trois angles d'Euler qui dérangent nécessairement la symétrie des calculs.

Schramm (H.). — *Les invariants et les covariants en qualité de critères pour les racines d'une équation.* Suite d'un travail précédent, inséré au tome I, p. 259-279. (13 p.; fr.)

Le paragraphe III est consacré à la recherche d'une espèce d'invariants indiquant la coexistence de r groupes à s racines égales.

Dans le chapitre qui suit, on cherche de même des invariants servant à indiquer l'existence de plusieurs racines égales et imaginaires.

Le travail se termine par l'application des résultats généraux à quelques équations particulières.

Aoust (L'abbé). — *Théorie des coordonnées curvilignes quelconques.* (15 p.; fr.). Suite d'un travail précédent, inséré au tome II, p. 39.

Ce Mémoire traite surtout des relations relatives à la courbure. On y donne différentes expressions de la courbure d'une surface et plusieurs relations entre les courbures des courbes faisant partie du sys-

tème. Ces formules s'appliquent simplement au problème des surfaces applicables les unes sur les autres.

Roberts (Michael). — *Sur les fonctions abéliennes.* (10 p.; fr.)

Cette Note contient la démonstration d'un théorème général de Jacobi et son application au cas où le polynôme sous le radical est du cinquième degré.

Hermite. — *Sur l'expression des modules des transcendantes elliptiques en fonction du quotient des deux périodes.* (2 p.; fr.)

Hermite. — *Sur l'intégrale* $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}$. (1 p.; fr.)

Hermite. — *Sur la transcendante* E_n. (1 p.; fr.)

Ce dernier article se rapporte à l'évaluation de la transcendante de Bessel, lorsque n est un grand nombre.

Matthiessen (L.). — *Des figures d'équilibre et de la rotation des anneaux sidéraux homogènes sans corps central, et de leur changement par expansion ou par condensation.* (28 p.; lat.)

Voir au sujet de ce Mémoire la *Mécanique céleste,* livre III, § 44, et un travail antérieur du même auteur dans le *Zeitschrift für Mathematik und Physik,* t. X, p. 59; 1865.

Smith. — *Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques.* (52 p.; fr.)

Ce Mémoire très-important a été couronné par l'Académie de Berlin. Ce qui le distingue surtout des travaux précédents, c'est le soin que l'auteur a pris d'examiner les cas où quelques-uns des éléments géométriques deviennent imaginaires. Dans ce but, M. Smith commence par donner une théorie des couples des points imaginaires qu'il considère, à l'exemple de M. Chasles, comme les points doubles d'une involution et qu'il appelle des *dyades* de points; il considère aussi les dyades de droites formées de deux droites imaginaires conjuguées.

Dans la première partie du Mémoire, on examine les problèmes les plus simples, et l'on montre que, toutes les fois qu'une construction pourra s'effectuer avec la règle quand les points seront réels, il en sera de même quand les points seront imaginaires. C'est ainsi que l'on peut, étant donnés quatre couples de points imaginaires conju-

gués deux à deux, trouver, par l'emploi seul de la règle, le neuvième point commun à toutes les *cubiques* passant par les huit points des quatre couples ou dyades.

Dans la seconde partie du Mémoire, M. Smith suppose qu'une conique ait été complétement tracée, et il montre que tous les problèmes cubiques et biquadratiques peuvent se résoudre par l'unique emploi de la règle, du compas et de cette conique. Il donne une démonstration simple de cette proposition énoncée par Descartes de la manière suivante :

« Or, quand on est assuré que le problème proposé est solide, soit que l'équation par laquelle on le cherche monte au quarré de quarré, soit qu'elle ne monte que jusqu'au cube, on peut toujours en trouver la racine par l'une des trois sections coniques, laquelle que ce soit, ou même par quelque partie de l'une d'elles, tant petite qu'elle puisse être, en ne se servant au reste que de lignes droites et de cercles. Mais je me contenterai de donner une règle générale pour les trouver toutes par le moyen d'une parabole, à cause qu'elle en est en quelque façon la plus simple. » *Géométrie,* livre III (*Œuvres de Descartes*, édition Cousin, t. V, p. 419).

Dans la troisième partie, l'auteur examine quelques problèmes célèbres, le problème des normales aux coniques et le problème suivant qui était plus spécialement proposé par l'Académie :

Étant donnés treize des points d'intersection de deux courbes du quatrième ordre, trouver les trois autres.

L'auteur apprend à construire linéairement deux courbes du troisième ordre, ayant six points communs et passant par ces trois points. On est ainsi conduit au problème suivant :

Étant donnés six points communs à deux courbes du troisième ordre, déterminer les trois autres points communs,

dont la solution a été donnée par M. Chasles.

L'examen des cas particuliers de ces différents problèmes est fait de la manière la plus complète et la plus rigoureuse.

Schwarz (A.). — *Note sur la représentation conforme d'une aire elliptique sur une aire circulaire.* (5 p.; it.)

Schlaefli (L.). — *La résolvante de l'équation du cinquième degré mise sous la forme d'un déterminant symétrique à quatre lignes.* (4 p.; it.)

Zeuthen (H.-G.). — *Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable* (*). (44 p.; fr.)

Smith. — *Appendice au Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques.* (25 p.; fr.)

Schlaefli (L.). — *Sur le développement de la période imaginaire pour le cas où le module de la fonction elliptique est infiniment petit.* (6 p.; it.)

Volpicelli (P.). — *De la distribution électrique sur les conducteurs isolés.* (20 p.; it.)

Le but de ce Mémoire important est la démonstration du théorème suivant : Étant donné un système de corps conducteurs, contenant chacun une certaine quantité d'électricité, la distribution de l'électricité à leur surface ne peut se faire que d'une seule manière. *Voir* à ce sujet un Mémoire de M. Liouville : *Additions à la Connaissance des Temps pour l'an* 1845; — *Problèmes de Mécanique rationnelle* du P. Jullien; Paris, 1855; t. II, p. 334-340; — Urbanski (A.), *Vorträge über höhere Physik;* Lemberg, 1857, p. 115; — un Mémoire de M. G. Belli : *Memorie della Società italiana,* t. XXII, p. 111-209.

C'est dans le Mémoire de M. Volpicelli que se trouvent toutes ces indications.

Dini (U.). — *Sur un problème qui se présente dans la théorie générale de la représentation géométrique d'une surface sur une autre.* (25 p.; it.)

Dans un Mémoire publié aux *Annales de Tortolini,* t. VII, M. Beltrami a démontré que les seules surfaces susceptibles d'être représentées sur un plan de telle manière qu'aux lignes géodésiques correspondent les droites du plan sont les surfaces à courbure constante positive, nulle ou négative. Dans le travail actuel, M. Dini se propose d'étudier un problème plus général, qu'on peut énoncer ainsi :

Trouver toutes les surfaces qui peuvent être représentées sur une autre surface, de manière qu'à un point de l'une des surfaces corresponde un seul point de l'autre, et qu'à toute ligne géodésique de l'une des surfaces corresponde une ligne géodésique de l'autre.

Cette question est complétement résolue de la manière suivante :

Appelons avec l'auteur *conique géodésique*, respectivement aux courbes A et B, une courbe telle que la somme ou la différence des

(*) Voir *Bulletin*, p. 139.

normales géodésiques menées d'un de ses points aux deux courbes A et B soit constante. Appelons cette conique une *ellipse* quand c'est la somme des normales qui est constante, une *hyperbole* quand c'est la différence. Cela posé, on a le théorème suivant :

Si, sur un surface, il existe un double système de lignes formé d'ellipses et d'hyperboles géodésiques ayant les mêmes courbes de base, et étant isothermes en prenant ces lignes pour lignes coordonnées u et v, l'élément linéaire de la surface se réduira à la forme

$$ds^2 = (U - V)(U_1 du^2 + V_1 dv^2),$$

où U, U_1 sont des fonctions de u; V, V_1 des fonctions de v, et *vice versa*. Si les lignes u et v sont orthogonales et isothermes, et qu'en les prenant pour coordonnées, l'élément de surface prenne la forme précédente, ces lignes seront des ellipses et des hyperboles géodésiques par rapport à deux quelconques des courbes représentées par les équations

$$\int\sqrt{(U-h)U_1}\,du + \int\sqrt{(h-V)V_1}\,dv = \text{const.},$$
$$\int\sqrt{(U-h)U_1}\,du - \int\sqrt{(h-V)V_1}\,dv = \text{const.},$$

où les constantes du second membre sont arbitraires, et h est une constante telle, que $U-h$, $h-V$ soient positives pour les régions de surface que l'on considère, et les paramètres elliptiques ou hyperboliques de chaque courbe, c'est-à-dire la somme ou la différence constante des normales, seront respectivement

$$2\int\sqrt{(U-h)U_1}\,du - c - c', \quad 2\int\sqrt{(h-V)V_1}\,dv - c + c',$$

où c, c' sont les constantes des seconds membres des courbes de base, dans les équations précédentes.

En faisant usage de la proposition précédente et d'un théorème élégant dû à M. Tissot, l'auteur arrive à la solution complète du problème proposé. Signalons encore le théorème suivant :

Dans une transformation homographique générale, les lignes orthogonales de la première figure qui restent orthogonales dans la seconde sont des ellipses et des hyperboles homofocales qui se changent en ellipses et hyperboles homofocales, et l'axe des foyers imaginaires de ces coniques est dans chaque figure la droite qui correspond aux points à l'infini dans l'autre. Les axes des foyers réels sont les droites perpendiculaires aux axes précédents qui sont en même temps cor-

respondantes. Les foyers réels dans les figures sont des points correspondants, les foyers imaginaires correspondent aux points à l'infini sur le cercle dans l'autre figure.

Roberts (Michael). — *Sur les lignes de courbure d'un ellipsoïde.* (14 p.; fr.)

Cet article se rapporte à des lignes de courbure exceptionnelles, signalées pour la première fois par M. Roberts, et dont l'arc ne dépend que des intégrales elliptiques.

Riemann (B.). — *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie.* Mémoire posthume, publié par R. Dedekind, et inséré dans le tome XIII des *Mémoires de la Société Royale de Gœttingue* (1867). Traduit de l'allemand par M. J. Hoüel. (18 p.; fr.)

Roberts (W.). — *Sur une intégrale double définie.* (4 p.; fr.)

Tardy (P.). — *Sur quelques théorèmes d'arithmétique.* (8 p.; it.)

Le but de cette Note est la démonstration de cinq théorèmes d'Eisenstein, énoncés au tome XXVII du *Journal de Crelle* (p. 281), dont il n'avait pas été publié de démonstration, quoique MM. Schaar (*) et Gennocchi (**) aient donné des théorèmes analogues.

Voir aussi un Mémoire de M. Stern, *Ueber einige Eigenschaften der Function* Ex (*Journal de Crelle-Borchardt,* t. LIX).

COMPTES RENDUS hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, publiés par MM. les Secrétaires perpétuels (***).

T. LXX.

N° 6 (****). Séance du 8 août 1870.

M. Phillips. — *Relation entre les chaleurs spécifiques et les coefficients de dilatation d'un corps quelconque.*

M. d'Abbadie. — *Sur la division décimale du quadrant.*

(*) *Mémoire sur une formule d'Analyse* (*Académie royale de Belgique,* t. XXIII).

(**) *Note sur la théorie des résidus quadratiques,* t. XXV du même Recueil.

(***) Voir *Bulletin,* p. 201.

(****) Nous n'indiquons pas les séances dans lesquelles on n'a pas présenté de Mémoire sur les Mathématiques.

N° 7. Séance du 16 août 1870.

M. Serret, présente à l'Académie le tome V des *Œuvres de Lagrange*. Voici la liste des Mémoires que contient ce volume :

Théorie de la libration de la Lune et des autres phénomènes qui dépendent de la figure non sphérique de cette planète.

Théorie des variations séculaires des éléments des planètes. (Première et seconde Partie.)

Théorie des variations périodiques des mouvements des planètes. (Première Partie.)

Sur les variations séculaires des mouvements moyens des planètes.

Théorie des variations périodiques des mouvements des planètes. (Seconde Partie.)

Sur la manière de rectifier les méthodes ordinaires d'approximation pour l'intégration des équations du mouvement des planètes.

Sur une méthode nouvelle d'approximation et d'interpolation.

Sur une nouvelle propriété du centre de gravité.

Méthode générale pour intégrer les équations aux différences partielles du premier ordre lorsque ces différences ne sont que linéaires.

Théorie géométrique du mouvement des aphélies des planètes, pour servir d'addition aux Principes de Newton.

Sur la manière de rectifier deux endroits des Principes de Newton relatifs à la propagation du son et au mouvement des ondes.

Mémoire sur une question concernant les annuités.

Mémoire sur l'expression du terme général d'une série récurrente lorsque l'équation génératrice a des racines égales.

Mémoire sur les sphéroïdes elliptiques.

Mémoire sur la méthode d'interpolation.

Mémoire sur l'équation séculaire de la Lune.

Mémoire sur une loi générale d'optique.

Rapports.

M. Yvon Villarceau. — *Division décimale des angles et du temps.*

P. Secchi présente à l'Académie le volume qu'il vient de publier, intitulé *le Soleil.*

M. de Fonvielle. — *Sur les découvertes astronomiques des anciens.*

N° 8. Séance du 22 août 1870.

M. Morin. — *Note sur la première session de la Commission internationale du mètre, tenue à Paris du* 8 *au* 13 *août* 1870.

M. Newcomb. — *Sur les inégalités de la Lune dues à l'action des planètes.*

N° 9. Séance du 29 août 1870.

M. Boussinesq. — *Essai théorique sur les lois trouvées expérimentalement par M. Bazin, pour l'écoulement uniforme de l'eau dans les canaux découverts.*

N° 10. Séance du 5 septembre 1870.

M. Boussinesq. — *Note complémentaire au Mémoire sur les ondes liquides périodiques. Établissement de relations générales et nouvelles entre l'énergie interne d'un corps fluide ou solide, et ses pressions ou forces élastiques.*

M. Delaunay. — *Découverte d'une comète par M. Coggia.*

N° 11. Séance du 12 septembre 1870.

M. Faye. — *Sur la manière d'observer le prochain passage de Vénus par M. Simon Newcomb.*

Voici comment s'exprime M. Faye :

« M. S. Newcomb a bien voulu m'adresser, il y a quelques jours, une Notice lue par lui à la *National Academy of Sciences* (U. S.) sur le prochain passage de Vénus. J'ai pensé que l'Académie aimerait à avoir connaissance de ce travail, qui montre qu'on se préoccupe en Amérique de ce grand phénomène tout autant qu'en Europe. M. Newcomb a voulu contrôler sérieusement l'opinion qui, dans la bouche de Halley, a donné jadis un si grand crédit aux passages de Vénus. Dans son Mémoire sur l'observation du passage de Mercure à Sainte-Hélène, ce grand astronome déclare qu'il avait observé, à moins d'une seconde près, le contact intérieur de Mercure et du Soleil, et c'est sur ce haut degré de précision qu'il établit l'espoir d'arriver, par les passages de Vénus, à mesurer avec une exactitude extrême la distance de la Terre au Soleil.

» M. Newcomb a pris la peine de réduire au centre de la Terre toutes les observations du dernier passage de Mercure en novembre 1868, et il en a formé un tableau très-instructif dont j'extrais les nombres suivants :

Contact observé avec déformation de l'image.		Contact observé sans déformation de l'image.	
$21^h 0^m$ — 2,4	Le Verrier, inst.	$21^h 0^m$ — 3,0	Rayet.
+ 4,0	Stone.	+ 1,5	Liais.
+ 4,7	Dunkin.	+ 4,9	André.
+ 11,3	Criswick.	+ 8,3	Villarceau.
+ 12,6	Carpenter, inst.	+ 11,4	Wolf.
+ 17,3	Buckingham.	+ 14,2	Duner.
		+ 29,6	Pohl.

» J'ai exclu les observations où les bords des astres sont notés comme mal définis, et celles dont le caractère ne se range pas dans les deux colonnes ci-dessus. M. Newcomb a d'ailleurs tenu compte de l'ouverture et du grossissement, qui a beaucoup varié d'un observateur à l'autre; il en conclut qu'il n'existe aucune dépendance entre ces éléments et l'instant de l'observation.

» Il résulte clairement du ce tableau que Halley se faisait quelque illusion lorsqu'il se flattait d'avoir observé à 1 seconde près l'instant d'un phénomène identique. On voit aussi que la même incertitude existe, soit que le phénomène se présente avec le caractère géométrique de deux disques en contact, ou qu'il soit altéré par une certaine déformation des images.

» M. Newcomb conclut de là que l'observation du prochain passage de Vénus échouera si l'on se contente d'observer comme autrefois les contacts intérieurs. Il propose les mesures photographiques. L'Académie verra sans doute avec intérêt que, plus les astronomes approfondissent cette question, plus ils se rallient à l'emploi de la photographie. M. Newcomb n'y pressent qu'une difficulté, celle de déterminer exactement l'échelle angulaire des images, et il conseille, pour cela, aux observateurs l'emploi d'appareils parallactiques qui permettraient de photographier les Pléiades avant et après l'observation de Vénus (*). Mais il me semble, et c'est une suggestion que je soumets aux astronomes, qu'il existe un moyen bien plus simple et bien plus praticable, moyen que j'ai employé moi-même avec un plein succès. Il consiste à photographier plusieurs fois une même partie du disque solaire pendant qu'il passe dans le champ de la lunette immo-

(*) On sait que ce sont les astronomes des États-Unis qui sont parvenus les premiers à photographier les étoiles et même des systèmes stellaires tels que les Pléiades.

bile, et à enregistrer les instants, à $\frac{1}{500}$ de seconde près, par le télégraphe électrique. Les bords ou plutôt les petites taches du Soleil fournissent, sur ces images, des points de repère parfaits pour déterminer la valeur angulaire des parties de l'image. Le même procédé permettra d'étudier complétement les déformations dues au système optique dans toutes les directions, car il suffit de prendre d'autres empreintes d'une nouvelle série de positions du Soleil, après avoir fait tourner la lunette autour de son axe d'un angle de 90 degrés, par exemple.

» Ce dernier procédé, qui n'a été appliqué jusqu'ici qu'à l'occasion de l'éclipse de 1858, dans les ateliers de M. Porro, me semble préférable, pour l'étude du système optique, à celui qu'on a adopté dans le même but à l'Observatoire de Kew, dont les astronomes ont poussé si loin l'étude photographique des taches du Soleil. A Kew on s'est contenté, si je ne me trompe, de photographier une grande règle divisée placée à une certaine distance, ou un dôme éloigné dont les dimensions étaient exactement connues. »

N° 13. Séance du 26 septembre 1870.

M. Chapelas. — *Aurore boréale du 24 septembre* 1870.

N° 14. Séance du 3 octobre 1870.

M. Faye. — *Sur l'affût de l'amiral Labrousse.*

M. Bienaymé. — *Traduction de deux passages de Stobée inexpliqués jusqu'ici.*

N° 15. Séance du 10 octobre 1870.

M. Dupuy de Lôme donne lecture d'une *Note sur un projet d'aérostat dirigé,* Note dont l'impression sera réunie à celle d'une Communication qui doit la compléter.

N° 16. Séance du 17 octobre 1870.

M. Dupuy de Lôme. — *Projet d'aérostat dirigé, muni d'un propulseur.*

N° 17. Séance du 24 octobre 1870.

M. Dupuy de Lôme donne quelques développements complémentaires sur la construction de son aérostat.

M. Morin communique à l'Académie une pièce manuscrite attribuée à Monge, et relative au système aérostatique de Meusnier.

M. Janssen. — *Sur l'eclipse totale du 22 décembre prochain.*

N° 18. Séance du 31 octobre 1870.

M. Dupuy de Lôme. — *Deuxième et troisième Notes sur les aérostats dirigés, faisant suite à la Communication du 10 octobre.*

M. Meusnier. — *Mémoire sur l'équilibre des machines aérostatiques, sur les différents moyens de les faire descendre ou monter, et spécialement sur celui d'exécuter ces manœuvres sans jeter de lest et sans perdre d'air inflammable, en ménageant dans le ballon une capacité particulière destinée à contenir de l'air atmosphérique.*

Ce Rapport, ou projet de Rapport, écrit entièrement de la main de Monge, mais non signé, a été trouvé dans les archives du Conservatoire des Arts et Métiers. Cette pièce est celle dont il a été fait mention dans le *Compte rendu* de la séance du 24 octobre, p. 529.

M. S. Lie. — *Sur une transformation géométrique.*

Dans cette importante Note, se trouve énoncé un théorème capital, dont les conséquences seront très-nombreuses, il faut l'espérer :

Toutes les fois qu'on connaît les lignes de courbure d'une surface, on peut en déduire les lignes asymptotiques d'une autre surface.

Par exemple, on sait trouver les lignes de courbure des surfaces du quatrième ordre ayant le cercle de l'infini pour ligne double, on déduit de là *les lignes asymptotiques de la surface des ondes, et en général de la surface de Kummer.* Nous reviendrons sur ces propositions et sur d'autres analogues dues à M. Klein dans un article spécial.

M. Hachette. — *Sur les circonstances qui ont pu amener Monge à s'occuper des questions relatives aux aérostats.*

M. Chapelas. — *Aurores boréales des 24 et 25 octobre.*

M. Salicis. — *Aurore boréale du 24 octobre.*

M. A. Guillemin. — *Aurores boréales des 24 et 25 octobre.*

M. Chasles présente à l'Académie différents opuscules mathématiques.

N° 19. Séance du 7 novembre 1870.

M. Faye. — *Sur la déviation des projectiles à ailettes.*

N° 22. Séance du 28 novembre 1870.

M. Yvon Villarceau. — *Note sur les conditions des petites oscillations d'un corps solide de figure quelconque, et la théorie des équations différentielles linéaires.*

N° 24. Séance du 12 décembre 1870.

M. Faye. — *Sur l'expédition de M. Janssen.*

M. J. Moutier. — *Sur la formule de la vitesse du son.*

N° 25. Séance du 19 décembre 1870.

M. Faye. — *Sur l'art de pointer et ses conditions physiologiques.*

N° 26. Séance du 26 décembre 1870.

M. J. Moutier. — *Recherches sur l'état solide.*

M. Flammarion. — *Éclipse de soleil du 22 décembre 1870. Mesure de la variation de la lumière* (*).

MÉLANGES.

NOTE SUR UN MÉMOIRE DE M. DINI (**).

Dans ce Mémoire, inséré aux *Annali di Matematica*, M. Dini a été amené à étudier les figures homographiques dans le plan, et il énonce la proposition suivante :

Étant données deux figures homographiques dans le plan, les seules lignes orthogonales de la première figure qui restent orthogonales dans la

---

(*) Il importe de ne pas perdre de vue que nous n'avons à rendre compte que des travaux se rapportant aux Mathématiques. L'activité de l'Académie s'est portée pendant le siége de Paris sur des travaux intéressant particulièrement la défense. On pourra consulter à ce sujet un ouvrage de M. Grimaud de Caux : *L'Académie des Sciences pendant le siége de Paris.*

(**) Voir *Bulletin*, p. 376.

seconde sont des ellipses et des hyperboles homofocales qui se changent en hyperboles et en ellipses homofocales.

La lecture de ce théorème nous a amené à penser qu'il peut s'étendre à l'espace. Voici en effet la proposition analogue.

Considérons dans l'espace deux figures homographiques, et soient A et B les deux coniques qui correspondent au cercle de l'infini C considéré comme appartenant successivement à chacune des figures. Il est évident que la développable (A, C) circonscrite à A et à C correspondra à la développable (C, B) circonscrite à C et à B. Par suite, au système des surfaces homofocales ayant A pour focale, correspondra le système des surfaces du même ordre ayant pour focale B. Il est, du reste, facile de faire voir que le système *triple* orthogonal ainsi formé est le seul qui reste orthogonal après la transformation. En effet, si l'on se propose de déterminer trois directions passant par un point, telles que les trois directions correspondantes soient perpendiculaires, on trouve que le problème n'a qu'une seule solution. Mais il n'en est pas de même si l'on considère seulement deux systèmes orthogonaux : dans ce cas, la solution dépend de la résolution d'une équation aux dérivées partielles du second ordre ; nous pourrons revenir sur ce problème dans une autre occasion, pour en dire quelques mots. G. D.

NOTICE SUR LA VIE ET LES TRAVAUX DE N.-I. LOBATCHEFSKY.

Troisième article.

TRAVAUX GÉOMÉTRIQUES DE LOBATCHEFSKY.

M. Ianichefsky, professeur de Mathématiques à l'Université de Kazan, publie en ce moment une nouvelle édition des *Œuvres géométriques de N.-I. Lobatchefsky* (Геометрическія сочиненія Н. И. Лобачевскаго, Kazan, gr. in-4°). Cinquante-trois feuilles de ce volume ont déjà paru. Elles contiennent les Mémoires désignés dans notre précédent article (*) sous les n°s 2, 9, 11 et 12, rangés par ordre chronologique. Pour donner une idée de cet ensemble de recherches, nous suivrons de préférence l'ordre naturel des matières.

(*) Voir *Bulletin*, p. 324.

Le nom de Lobatchefsky est connu surtout, jusqu'à présent, par ses découvertes relatives à la théorie des parallèles. Il s'en faut de beaucoup cependant que les services rendus par lui à la science soient limités à cette question spéciale. On lui doit un Traité complet sur les fondements de la Géométrie, où il a présenté sous une forme neuve et originale les principes essentiels de la science de l'espace.

Ces principes, connus depuis plus de vingt siècles, ont été, par malheur, acceptés trop tôt comme évidents et immuables. L'exposition qu'en a donnée Euclide a paru tellement satisfaisante, qu'on ne s'est pas occupé de savoir s'il n'existait pas d'autres manières plus rationnelles de coordonner les vérités géométriques, et les esprits éminents, quand ils ont traité la question, l'ont plutôt considérée au point de vue métaphysique qu'au point de vue mathématique.

Cependant les travaux de Gauss, de Lobatchefsky, de J. Bolyai, de Riemann, de Helmholtz, et d'autres grands géomètres ont mis hors de doute qu'il reste quelque chose à faire sur ce sujet. Lors même qu'on ne serait pas encore parvenu au but désiré, lors même qu'on n'aurait pas encore découvert la méthode la plus scientifique et, par suite, la plus simple pour organiser l'enchaînement des vérités de la Géométrie, on ne devrait pas moins une vive reconnaissance à ces novateurs qui ont *remué des idées* et fait sortir cette question de l'état de stagnation où elle était restée pendant deux mille ans. Si à cette heure la solution n'est pas encore complète, on en possède du moins presque tous les éléments. La mise en œuvre des matériaux acquis serait une tâche bien digne de tenter l'ambition d'un géomètre habile, et l'utilité d'un livre fondé sur des bases vraiment rationnelles serait immense pour l'enseignement élémentaire, qui se trouverait ainsi délivré de tant de Traités reposant sur des conceptions fausses.

Nous allons essayer d'indiquer les principales modifications à la méthode ordinaire, proposées par Lobatchefsky dans son grand travail intitulé : Новыя начала Геометріи, съ полной теоріей параллельныхъ (*), et publié, comme nous l'avons dit dans un article précédent (**) dans les *Mémoires de l'Université de Kazan* pour les

(*) Nouveaux principes de Géométrie, avec une Théorie complète des parallèles, en six articles, comprenant 470 pages in-8°.

(**) *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*; 1870, p. 324.

années 1835-1838. Lobatchefsky n'emploie dans ce travail que les procédés habituels de la Géométrie élémentaire. Il cherche à réduire les axiomes au moindre nombre possible, et à faire ressortir le rôle que chacun d'eux joue séparément dans l'ensemble de la théorie.

L'ouvrage, divisé en treize Chapitres, est précédé d'une Introduction (30 pages), dans laquelle l'auteur discute les démonstrations du principe des parallèles, données par Legendre et par Bertrand (de Genève), et en démontre rigoureusement l'insuffisance. Nous reviendrons sur cette question, lorsque nous aurons vu ce que devient la Trigonométrie plane, tant qu'on n'a pas encore prononcé sur la question de l'axiome XI d'Euclide.

Le Chapitre Ier (16 pages), intitulé : *Premières notions de Géométrie,* traite des diverses manières dont un corps peut être divisé, et contient les définitions des surfaces, des lignes et des points. Lobatchefsky établit ces définitions de la manière même dont on y a été conduit par l'expérience. On parvient, par exemple, à l'idée de surface en amincissant indéfiniment un corps dans le voisinage de sa limite, et les propriétés des surfaces sont celles vers lesquelles convergent les propriétés d'un tel corps infiniment mince.

L'objet du Chapitre II (26 pages) est la démonstration de l'existence du plan et de la ligne droite, en partant d'un axiome unique : l'existence de la sphère.

Jusqu'à présent on avait admis comme première hypothèse de la Géométrie l'existence d'une suite continue de points, qui restent immobiles, lorsqu'un système solide dont ils font partie tourne autour de deux de ces points, supposés fixes; et l'ensemble de tous ces points immobiles forme une ligne, indéfinie dans les deux sens, et que l'on appelle *ligne droite.*

De la notion de la ligne droite on peut déduire celle du plan, lieu des positions d'une droite mobile qui glisse sur deux droites fixes partant d'un même point (*).

Mais la constatation expérimentale de l'immobilité de certains points d'un système rigide ne peut se faire qu'au moyen de mesures approximatives, et l'on ne peut jamais vérifier l'hypothèse en toute rigueur. A cette hypothèse, qui repose seulement sur une induction,

---

(*) *Voyez* une Note de M. Valeriani (*Giornale di Matematiche,* t. VII, décembre 1869).

Lobatchefsky et J. Bolyai (*) ont voulu en substituer une autre, n'empruntant à l'expérience que des relations de situation, toujours exactement vérifiables.

Étant admise la notion indéfinissable de la solidité, la distance de deux points A, B est dite *égale* à celle de deux autres points A′, B′, si l'on peut faire coïncider successivement les deux mêmes points d'un système solide d'abord avec A et B, puis avec A′ et B′.

La sphère est le lieu des points équidistants d'un point fixe. C'est une surface simple et complétement fermée.

D'un centre donné on peut toujours décrire une sphère, et une seule, qui passe par un point donné.

Une sphère ne peut avoir qu'un seul centre.

Si, de deux centres fixes et avec une distance convenable, on décrit deux sphères égales, l'intersection de ces sphères est un *cercle*, ayant les deux centres fixes pour *pôles*.

Le lieu des cercles décrits des mêmes pôles est une surface indéfinie, superposable à elle-même par retournement, et que l'on appelle *plan*.

Si l'on fait tourner un plan autour de deux de ses points, supposés fixes, il y a un ensemble de points qui restent immobiles (ou du moins qui reviennent sur eux-mêmes au bout d'une demi-révolution); ces points forment une ligne indéfinie dans les deux sens, que l'on appelle *la ligne droite*.

Deux droites qui ont deux points communs se confondent.

Une droite qui a deux points dans un plan y est située entièrement.

Deux plans qui ont trois points communs non en ligne droite se confondent.

On établit ensuite les propriétés fondamentales de la sphère, du cercle, du plan, de la ligne droite, les caractères des positions relatives de deux sphères ou de deux cercles, etc.

Si cet enchaînement de propositions pouvait s'établir d'une manière à la fois simple et rigoureuse, il n'est pas douteux que les principes de la Géométrie n'eussent ainsi acquis une base plus solide et plus indépendante des erreurs de l'expérimentation. Cette méthode

---

(*) *Kurzer Grundriss eines Versuchs u. s. w.* Maros Vásárhely, 1851.

conduirait en même temps plus directement à un grand nombre de propriétés des figures formées par des droites ou par des plans.

Il nous semble malheureusement que les déductions de Lobatchefsky et de J. Bolyai sont mêlées de suppositions qui nécessitent de nouveaux appels à l'expérience, et que, tout au plus, leur raisonnement démontre l'existence de la ligne droite *dans le plan,* mais non celle de la ligne droite *dans l'espace* (*). Nous laissons de côté la question de simplicité qui est d'un intérêt secondaire tant qu'il ne s'agit pas d'une application à l'enseignement élémentaire.

Il ne faut pas toutefois renoncer à l'idée de voir un jour les fondements de la Géométrie établis sur cette base d'une manière pleinement rigoureuse. Des tentatives récentes, encore inédites, dues à un géomètre qui a profondément étudié la question, nous font espérer une prochaine solution des difficultés qui restent encore à vaincre.

J. H.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Abbe (Cleveland). — The portable Transit-Instrument in the vertical of the Pole Star, translated from the original Memoir of W. Döllen. Washington, 1870.

Bardey (E.). — Quadratische Gleichungen mit den Lösungen. Gr. in-8. Leipzig, Teubner. 16 Ngr.

Baur (F.). — Lehrbuch der niedern Geodäsie. 2. Aufl. Gr. in-8. Wien, Braumüller. 3 $\frac{1}{3}$ Thlr.

Becker (E.). — Tafeln der Amphitrite. Mit Berücksichtigung der Störungen durch Jupiter, Saturn und Mars. Gr. in-4. Leipzig, Engelmann. 2 $\frac{2}{3}$ Thlr.

Becker (Fr.). — Die elementare Geometrie in neuer Anordnung. Programm der Realschule 2. Ordn. in Hanau. 39 S. In-4 mit 2 Taf. in qu.-Fol.

(*) *Voyez* la distinction que M. Beltrami a établie entre ces deux notions (*Saggio di interpretazione, ecc.* Giorn. di Mat.; t. VI, p. 285; *Essai d'interprétation,* etc. Annales de l'École Normale supérieure; t. VI, p. 253).

Berg (F.-W.). — Ueber die Berechnung der Störungen. Dissert. a. d. J. 1869. 72 S. In-8. Dorpat.

Bollettino meteorologico ed astronomico del Regio Osservatorio dell' Università di Torino. Anno IV, 1869.

Breen (Hugh). — On the Corrections of Bouvard's Elements of the Orbits of Jupiter and Saturn, 1868.

Bruhns (C.). — Bestimmung der Längendifferenz zwischen Berlin und Wien. Gr. in-4. Leipzig, Engelmann. 1 Thlr.

Brünnow (F.). —Lehrbuch der sphärischen Astronomie. 3. Ausgabe. Gr. in-8. Berlin, Dümmler. 4 Thlr.

Clebsch (A.).—Ueber die partiellen Differentialgleichungen, welchen die absoluten Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen genügen. Gr. in-4. Göttingen, Dieterich. 16 Ngr.

Clouth (F.-M.). — Tafeln zur Berechnung goniometrischer Coordinaten. Lex.-8. Halle, Nebert. 1 $\frac{2}{3}$ Thlr.

Coffin (J.-H.). — The Orbit and Phenomena of a Meteoric Fire-Ball, seen July 20, 1860. Washington, 1869.

Da Schio (A.). — Salita sull' Etna per la ecclisse totale del sole del 22 dicembre 1870. In-32, 24 p. Vicenza, tip. Paroni.

Dase (Zacharias).— Factorentafel für alle Zahlen der 7-8 Millionen, mit den darin vorkommenden Primzahlen. 1862-1865, 3 kl. Folio-Bande cartonirt. Hamburg, W. Mauke. Pr. 4 Thlr.

Denza (Fr.). — Le stelle cadenti dei periodi di novembre 1868 ed agosto 1869 osservate in Piemonte ed in altre contrade d'Italia. Torino, 1870.

Dietzel (C.-F.).—Leitfaden für den Unterricht im technischen Zeichnen. 3. Heft. Die Elemente der Perspective. 2. Aufl. Gr. in-8. Leipzig, Seemann. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Dronke (Ad.).— Julius Plücker, Professor der Mathematik und Physik an der Rhein. Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn. Biographische Notizen. Gr. in-8. Bonn, Markus. $\frac{1}{6}$ Thlr.

Dunham's Multiplication and Division Tables, from One to Ten Mil-

lions, adapted to every calculation. Folio, 52 p. cloth. London, Wilson. 21 sh.

Garbich (N.). — Analytische Methode zur Berechnung der Sonnenfinsternisse, sowie aller anderen Occultationen. Gr. in-8. Triest, Schimpf. 1 Thlr.

Gauss (F.-G.). — Fünfstellige, vollständige, logarithmische und trigonometrische Tafeln. Zum Gebrauche für Schule und Praxis. Berlin, L. Rauh, 1870.

Green (George). — Mathematical Papers. Edited by *N.-M. Ferrers*. In-8, 346 p., cloth. London, Macmillan. 15 sh.

Hesse (O.). — Die Determinanten. Gr. in-8. Leipzig, Teubner. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Hind (J.-R.). — An Introduction to Astronomy. 3d edit. In-12. London, Bell and Daldy. 3 sh. 6 d.

Jacobi (C.-G.-J.). — Mathematische Werke. 3. Bd. Gr. in-4. Berlin, G. Reimer. 4 Thlr.

Klinkerfues (W.). — Theoretische Astronomie. Erste Abtheilung. Braunschweig, Vieweg, 1871.

Kretschmer (E.). — Beiträge zur Theorie der Flächen mit ebenen Krümmungslinien, welche gegebenen Bedingungen genügen. Gr. in-8. Frankfurt a. d. O., Harnecker und Co. $\frac{1}{3}$ Thlr.

Main (R.). — Second Radcliffe Catalogue, containing 2386 Stars; deduced from Observations extending from 1854 to 1861, at the Radcliffe Observatory, Oxford; and reduced to the epoch 1860. Oxford, James Parker and Co., 1870.

Main (R.). — Results of Astronomical and Meteorological Observations made at the Radcliffe Observatory, Oxford, in the year 1867. Vol. XXVII. Oxford, James Barker and Co, 1870.

Meyerstein (M.). — Das Spectrometer. Ein neues Instrument zur Bestimmung der Brechungs- und Zerstreuungs-Verhältnisse verschiedener Medien, u. s. w. 2. Aufl. Göttingen, Deuerlich'sche Buchhandlung, 1870.

Möller (Axel). — Planet-och Komet-Observationer, anställda år 1868 på Lunds Observatorium. Lund, 1859.

Nautical-Magazine and Naval Chronicle for 1870. In-8. boards. London, Simpkin. 13 sh. 6 d.

Neumayer (G.). — Results of the Magnetic Survey of the Colony of Victoria, executed during the years 1858-1864. Mannheim, J. Schneider, 1869.

Pihl (O.-A.-L.). — Micrometric Examination of Stellar Cluster in Perseus. Christiania, B.-M. Bentzen, 1869.

Proctor (R.-A.). — A Star Atlas for the Library, the School, and the Observatory. 2d Edit. Folio. London, Longmans. 25 sh.

Proctor (R.-A.). — The Sun; Ruler, Fire, Light and Life of the Planetary System. With ten lithographic plates (seven coloured) and 107 drawings on woods. Post-8, 504 p., cloth. London, Longmans. 10 sh. 6 d.

Repertorium für Meteorologie. Herausgegeben von der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Redigirt von Dr. *Heinrich Wild,* Mitglied der Akademie und Director des physikalischen Central-Observatoriums. Band 1, Heft I. St. Petersburg, 1869.

Rollwyn (J.-A.-S.). — Astronomy simplified for General Reading; with numerous new Explanations and Discoveries in Spectrum Analysis, etc. In-8, 420 p., cloth. London, Tegg. 10 sh. 6 d.

Schiaparelli (G.-V.). — Alcuni risultati preliminari tratti delle osservazioni di Stelle cadenti, pubblicate nelle Effemeridi degli anni 1868, 1869, 1870.

Schubert (E.). — Tables of Harmonia. Washington, 1869.

Stürmer (C.-M.). — Argumententafeln zu den von P.-A. Hansen construirten ecliptischen Tafeln. Gr. in-8. Landshut, Krüll. $\frac{1}{2}$ Thlr.

Tables to facilitate the Reduction of Places of the Fixed Stars. Prepared for the Use of the American Ephemeris and Nautical Almanac. Washington; Bureau of Navigation, Navy Department; 1869.

Tschermak (G.). — Ueber den Meteoriten von Goalpara und über die leuchtende Spur der Meteore (Abd. a. d. Sitzb. d. Ak.). Lex.-8. Wien, Gerold. 4 Ngr.

Versluys (J.). — Leerboek der stereometrie. Gr. in-8, 7 en 160 bl. Groningen. Noordhoff. 2 fl. 25 c.

Weyer (G.-D.-E.). — Vorlesungen über nautische Astronomie. Gr. in-8. Kiel, Schwers. 1 Thlr.

Wild (H.). — Repertorium für Meteorologie. Herausgegeben von der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Bd. I, Heft 1. St. Petersburg, 1869.

Wochenschrift für Astronomie, Meteorologie und Geographie. Redigirt von *Heis*. Neue Folge. 14. Jahrgang, 1871. N° 1. In-8. Halle, Schmidt. pro complet 3 Thlr.

Wöckel (L.). — 850 Konstrucktions-problemer. Efter 9[e] upplagan öfversätt af C. U. Dieterich. In-12, 154 sid. Stockholm, Fahlstedt. 1 rd.

Worpitzky. — Beiträge zur Functionentheorie. Gr. in-8. Berlin, Calvary und Co. 12 Ngr.

Wolf (R.). — Die Erfindung des Fernrohrs und ihre Folgen für die Astronomie. Vortrag. Gr. in-8. Zürich, Schulthess. 9 Ngr.

Wolf (R.). — Handbuch der Mathematik, Physik, Geodäsie u. Astronomie. 1 Bd., 2 Lfg. Ebendas. 1 Thlr. 6 Ngr.

Wolf (R.). — Matériaux divers pour l'histoire des Mathématiques. In-4; 32 p. 1 planche. Roma, tip. delle Scienze matematiche e fisiche.

Young (Fr. and J.-R.). — Euclid's Elements of Geometry. Books 1, 2 and 3. With Notes, Explanatory Remarks, etc. In-18, cloth. London, Routledge. 1 sh.

Zelewski (A.-V.). — Ein Beitrag zur Theorie der Determinanten. Gr. in-8. Breslau, Goerlich und Coch. 8 Ngr.

Zeuner (G.). — Abhandlungen aus der mathematischen Statistik. Gr. in-8. Leipzig, Felix. 2 Thlr.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TABLE ANALYTIQUE

DES MATIÈRES.

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

MÉLANGES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET JOURNAUX DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS LE BULLETIN.

TABLE DES MÉMOIRES ET OUVRAGES

PAR ORDRE MÉTHODIQUE.

ALGÈBRE.

Théorie des équations. — Substitutions.

Déterminants.

Théorie des formes homogènes.

ARITHMÉTIQUE.

Théorie des nombres.

ASTRONOMIE THÉORIQUE. — ÉPHÉMÉRIDES.

ASTRONOMIE PRATIQUE.

Analyse spectrale. — Observations stellaires.

BIBLIOGRAPHIE. — HISTOIRE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES.

CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Équations différentielles.— Calcul des variations.— Calcul des différences finies.

CALCUL NUMÉRIQUE. — TABLES DE LOGARITHMES. — MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS.

FONCTIONS PARTICULIÈRES.

Fonctions elliptiques, abéliennes, de Laplace, eulériennes, de Bessel.

GÉODÉSIE.

Magnétisme terrestre.

GÉOMÉTRIE.

Géométrie analytique. — Courbes et surfaces de degré supérieur.

Géométrie analytique. — Sections coniques et surfaces du second ordre.

Géométrie élémentaire, synthétique.

Géométrie infinitésimale. — Courbure. — Coordonnées curvilignes. — Représentation géographique.

Méthodes de transformation. — Transformations rationnelles.

Géométrie linéaire. — Complexes.

Géométrie descriptive, graphique.

Courbes et surfaces d'une génération particulière.

MÉCANIQUE.

Cinématique.

Mécanique analytique. — Attraction. — Centre de gravité.

Mécanique physique et expérimentale.

PHYSIQUE MATHÉMATIQUE.

Magnétisme.

Électricité.

Thermodynamique.

Optique.

Physique mathématique générale.

PROBABILITÉS.

SÉRIES.

Binômes. — Fractions continues.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

U

V

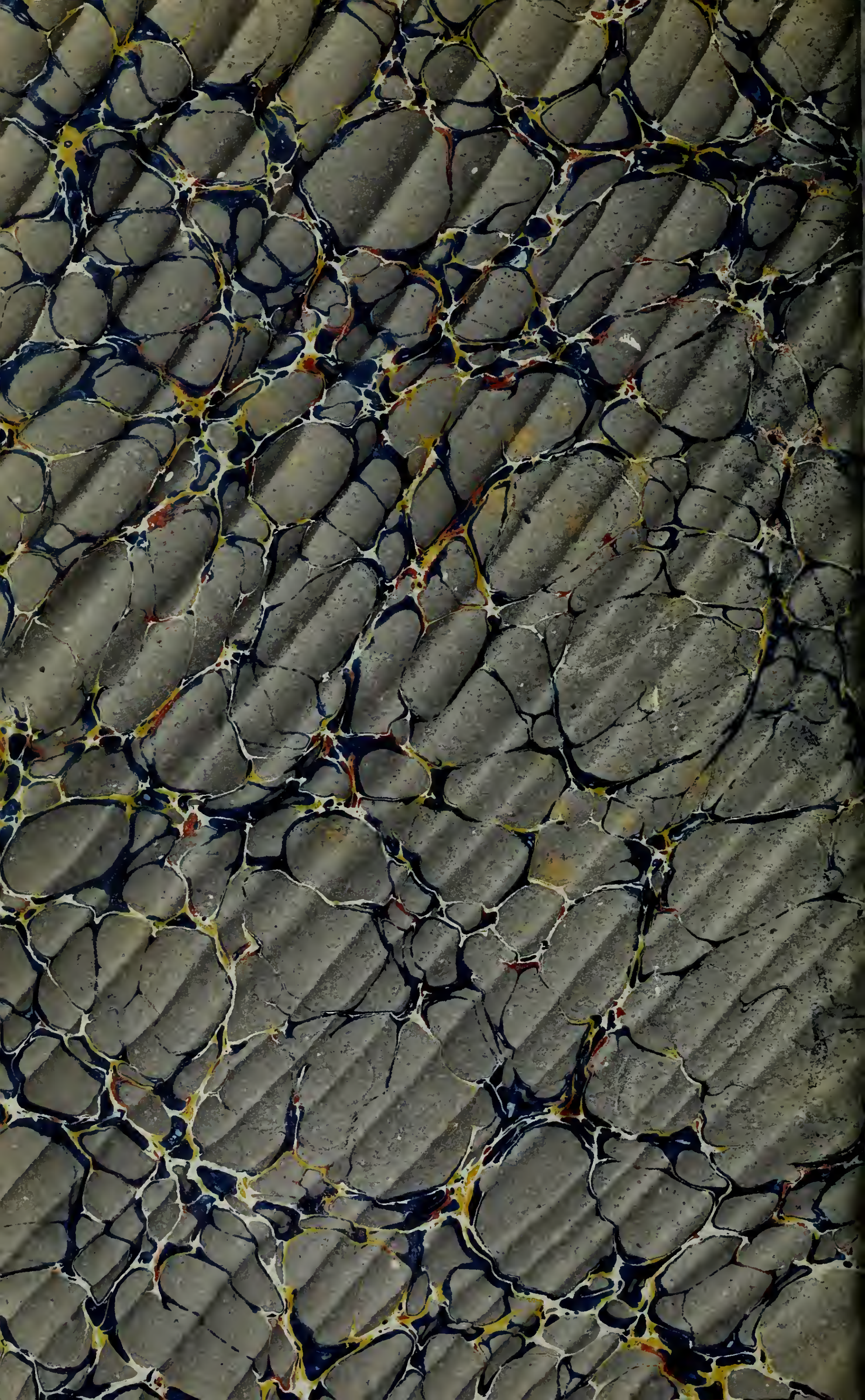
W

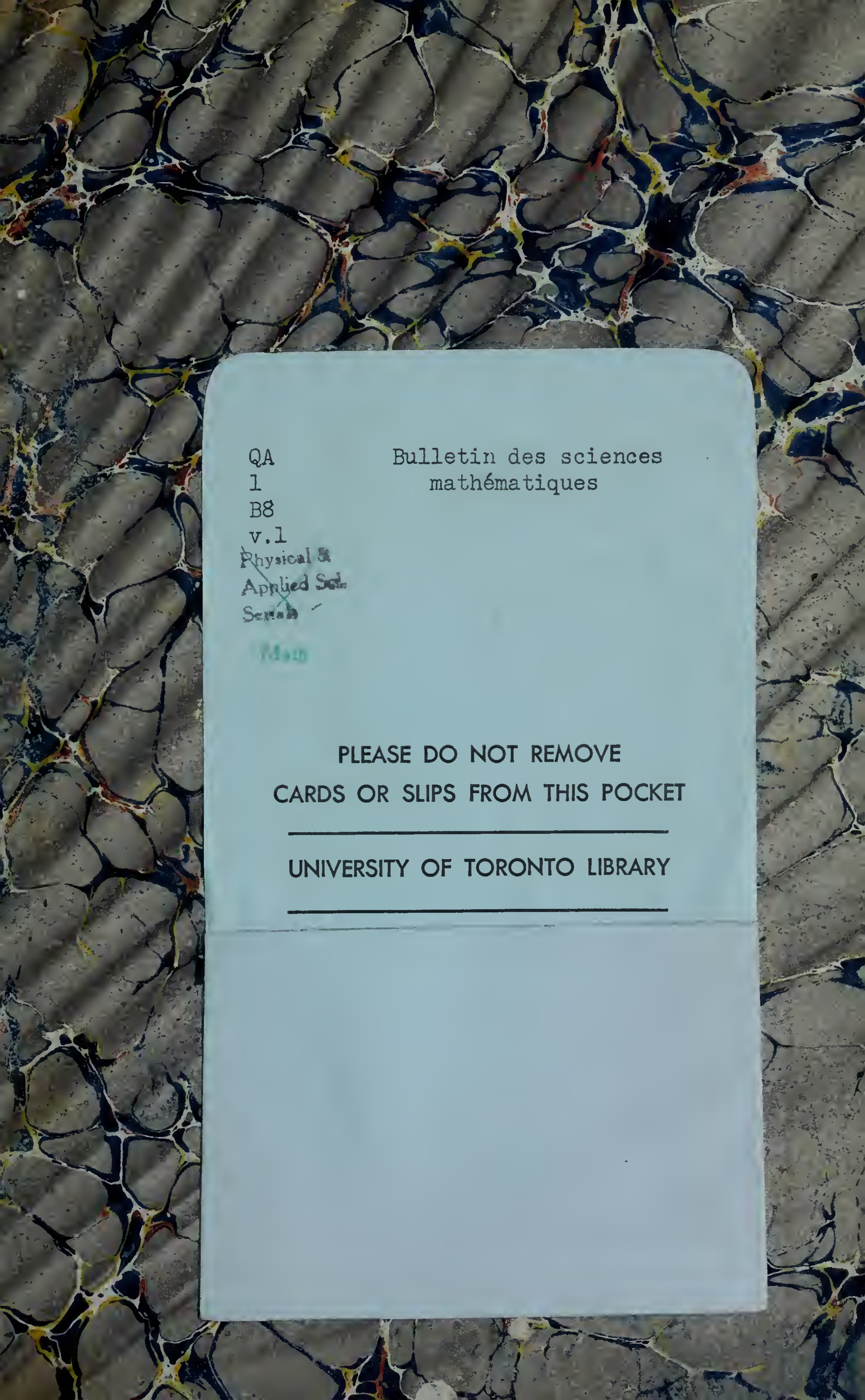
Y

Z

FIN DU TOME PREMIER.

Paris. — Imprimerie de Gauthier-Villars, quai des Augustins, 55.





QA
1
B8
v.1
Bulletin des sciences mathématiques
Physical &
Applied Sci.
Serials
Math
PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET
UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY

